jml@ecole-alsacienne.org

Intégrales et Primitives – Intégration Par Parties – Encadrements d'Intégrales

(Calculatrices conseillées)

<u>EXERCICE</u> I : [6 points] On pose $u_n = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) e^{\frac{t}{n}} dt$ pour tout entier naturel n > 0.

1. Soit *g* la fonction définie par *g(t)* = $\frac{2t+3}{t+2}$.
   a. Etudier les variations de *g* sur [0 ; 2].
   En déduire que pour tout réel $t \in [0\,;2]$ on a $\frac{3}{2} \le g(t) \le \frac{7}{4}$
   b. Montrer que pour tout Réel $t \in [0\,;2]$, on a $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \le g(t)e^{\frac{t}{n}} \le \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$
   c. En déduire au moyen d'une intégration que :
   $$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \le u_n \le \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$$
   d. On rappelle que $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$. En déduire que si (u_n) possède une limite L alors $3 \le L \le 3{,}5$
2. a) Vérifier que pour tout $t \in [0\,;2]$, on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$
   En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) dt$
   b) Montrer que pour tout $t \in [0\,;2]$, on a $1 \le e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{2}{n}}$
   En déduire que $I \le u_n \le e^{\frac{2}{n}} I$
   c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

<u>EXERCICE</u> II : [5 points] On considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ pour tout n ∈ N*.

1. a) Démontrer que pour tout $x \in \,]1; e[$ et pour tout n ∈ N, on a :
   $$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$
   b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2. a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n ∈ N* :
   $$I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n$$
   c) En déduire I_2, I_3, I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3. a) Démontrer que pour tout n ∈ N* , $I_n \ge 0$.
   b)Démontrer que, pour tout n ∈ N*, $(n+1)\, I_n \le e$.
   c) En déduire la limite de I_n .
   d) Déterminer la valeur de : $n.I_n + (I_n + I_{n+1})$, et en déduire la limite de $n.\,I_n$.

T.S.V.P. →

Intégrales et Primitives – Intégration Par Parties – Encadrements d'Intégrales

(Calculatrices conseillées)

<u>EXERCICE</u> III : [4 points] Soit α un Réel strictement positif.

1. On pose $I(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$
   a. Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$
2. On pose $J(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$.
   a. En utilisant une intégration par parties, exprimer $J(\alpha)$ en fonction de α et de $I(\alpha)$, puis en fonction de α.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} J(\alpha)$

<u>EXERCICE</u> IV : [5 points] On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

1. a) Démontrer à l'aide d'une représentation graphique que quelque soit $x > 0$ on a toujours $x^2 > \ln x$.
   b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
   c) Démontrer qu'il existe un nombre α unique tel que $f(\alpha) = 0$, et déterminer une valeur de α à 10^{-2} près par défaut à l'aide d'une calculatrice.
   d) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de f.
   e) Tracer la courbe *(C)* représentative de f sur l'intervalle $]0\,;e[$. dans un repère orthogonal ayant pour unités 2cm horizontalement et 1cm verticalement.
   f) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan défini par la courbe *(C)* sur $[\alpha\,;e]$.

2. Soit H la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$H(x) = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x}$$

   a. Démontrer que sur $]0\,;+\infty[$, la fonction H est une primitive de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$
   b. A l'aide d'une intégration par parties calculer $I = \int_1^e \ln x . dx$
   c. Calculer l'intégrale $J = \int_1^e [f(x)]^2 dx$. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

NB : On montrera dans la suite du cours que cette dernière intégrale est proportionnelle à la mesure du volume du solide de révolution engendré par rotation de la courbe (C) autour de l'axe (Ox) sur l'intervalle [1 ; e].