Exercice I (6 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure. **[1 pt]**

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

[1 pt]

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ? **[1 pt]**

4. a. Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
En déduire la nature du triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$. **[1 pt]**

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
On a ainsi $\ell_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ? **[1 pt]**

c. Indiquer par quelles transformations du plan on passe de A_n à A_{n+1}. Préciser les éléments de ces transformations. [1pt]

Exercice II (4 pts)

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\[2mm] b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}.$$

Soit D une droite munie d'un repère $(\mathrm{O} ; \vec{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n.

3. Comparer a_n et b_n. Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
Interpréter géométriquement ces résultats.

4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = b_n + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que (v_n) est une suite constante.
En déduire que les segments $[\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n]$ ont tous le même milieu I.

6. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

T.S.V.P →