jml@ecole-alsacienne.org
2004-2005

MATHÉMATIQUES - $1^{ère}$ S_5
Contrôle N°5 • 26 janvier. • 100 min.

Fonction Numérique - Produit Scalaire - Barycentres

I - [8 pts] Étude de la fonction *f* définie par : $\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{|x^2 - 1|}}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux). Pour cela on pose $\boldsymbol{f_1(x) = x\sqrt{x^2 - 1}}$ et $\boldsymbol{f_2(x) = x\sqrt{1 - x^2}}$.

Pour chacune des deux fonctions f_1 et f_2, (on appelle respectivement (C_1) et (C_2) leur courbe représentative) :

1. Indiquer sans démonstration l'ensemble de définition, et les limites aux bornes.
2. Calculer la dérivée pour x ≠ 1 et x ≠ -1, factoriser l'expression obtenue et étudier son signe, puis dresser le tableau des variations et des limites.*(On pourra tout inscrire dans un seul et même tableau*).
3. Étudier la dérivabilité de f_1 en 1^+ et en -1^- ainsi que la dérivabilité de f_2 en 1^- et en -1^+.
4. Que peut-on en conclure pour la dérivabilité de *f* en -1 et en 1 ?
5. La courbe (C_f) étant la réunion des deux courbes (C_1) et (C_2), admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ? au point d'abscisse -1 ? Si oui en donner une équation.
6. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point d'abscisse 0.
7. Dans un même repère placer la tangente (T_0), les points particuliers (extrema et intersections avec les axes) et tracer les courbes (C_1) et (C_2), avec soin et propreté.
8. Que peut-on dire des points de la courbe (C_f) d'abscisse 1 et d'abscisse -1 respectivement ?

II - [7 pts] Soient A et B deux points fixés dans le plan. On appelle I le milieu de [AB] et on pose AB = 4 (cm).

1°) Déterminer et construire sur une même figure :

a. l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 16$

b. l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 16$

c. l'ensemble (G) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \circ \overrightarrow{MB} = 16$

2°) Soit H barycentre de {(A ;1) ; (B ;3)} et K barycentre de {(A ;1) ; (B ; -3)}

a. Construire les points H et K.

b. Démontrer l'équivalence : $\dfrac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}) \circ (\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB}) = 0$

c. Démontrer l'équivalence : $(\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}) \circ (\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \circ \overrightarrow{MK} = 0$

d. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 3$

III- [5 pts] Soit ABCD un carré de côté a dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en I.

Soit G le barycentre du système S ={(A,1);(B,2);(C,-1)}

1°) Écrire la relation vectorielle qui définit le point G.

2°) En déduire que quelque soit un point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MG}$

3°) En déduire que G est le symétrique de I par rapport au côté (AB).

4°) Déterminer l ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$.

5°) Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 (*pour ce dernier on pourra utiliser le milieu K de [CD]*)

6°) Démontrer que $MA^2 + 2\,MB^2 - MC^2 = 2\,MG^2 + GA^2 + 2\,GB^2 - GC^2 = 2\,MG^2 - a^2$.

7°) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + 2\,MB^2 - MC^2 = a^2$.