Evariste Galois et la résolution des équations

Dès la classe de 1ère , on sait résoudre les équations du 2nd degré, $ax^2 + bx + c = 0$, dans le cas général.
Les mathématiciens ont longtemps chercher à résoudre l'équation du 5ème degré, $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$.
En 1535, Niccolo Tartaglia avait résolu l'équation du 3ème degré, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ et en 1540, Ludovico Ferrari avait résolu celle du 4ème degré, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.
L'équation du 5ème résistait aux nombreuses tentatives de résolution.
Niels Abel montre, en 1826, que l'équation du 5ème degré n'est pas résoluble par radicaux, c'est-à-dire en utilisant les quatre opérations +, -, $\times$, $\div$ et les racines.
Enfin, en 1832, Evariste Galois montre que les équations de degré supérieur à 5 ne sont pas non plus résolubles par radicaux.

Evariste Galois (1811-1832)

Né à Bourg-la-Reine.

Brillant élève, il est pourtant refusé à l'Ecole Polytechnique. A une question de l'examinateur qu'il jugeait ennuyeuse, il aurait répondu : « Je ne vais pas passer ma vie à faire des calculs ! ». [8]

Comme l'a montré Joseph Lagrange en 1772, la résolubilité de l'équation du 4ème degré est liée à la possibilité de transformer cette équation en une équation de degré moindre qui soit plus simple à résoudre.
Essayons d'expliquer sur un exemple ce qu'est une équation résoluble par radicaux.
Considérons une équation du 4ème degré qui a pour solutions : $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, c'est-à-dire : $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$.
Calculons l'expression suivante : $\sqrt{2}\times(-\sqrt{2}) + \sqrt{3}\times(-\sqrt{3})$.
$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2}) + \sqrt{3}\times(-\sqrt{3}) = -2-3 = -5$.
Permutons les 4 solutions, c'est-à-dire changeons l'ordre de ces 4 solutions :
$-\sqrt{2}\times\sqrt{2} - \sqrt{3}\times\sqrt{3} = -2-3 = -5$.
$\sqrt{2}\times(-\sqrt{3}) - \sqrt{2}\times\sqrt{3} = -\sqrt{6} - \sqrt{6} = -2\sqrt{6}$.
$\sqrt{2}\times\sqrt{3} - \sqrt{2}\times(-\sqrt{3}) = \sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.
Si on essaye les 20 autres manières de placer les 4 solutions, c'est-à-dire les 20 autres permutations, on n'obtient toujours que 3 résultats différents : -5, $-2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$.
Ces 3 valeurs sont à leur tour les 3 solutions d'une équation du 3ème degré :
$(x+5)(x+2\sqrt{6})(x-2\sqrt{6}) = 0$.
Nous avons bien transformé une équation de degré 4 en une équation de degré moindre.