Carl Friedrich Gauss et les polygones réguliers constructibles

Dès la classe de $6^{\text{ème}}$, on apprend à construire, avec la règle non graduée et le compas, un triangle équilatéral, un carré et même un hexagone régulier.
Au $3^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère, pour toutes les constructions géométriques étudiées dans ses « Eléments », Euclide employait uniquement la règle et le compas. Dans ces livres, il donnait déjà les constructions des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 15 côtés et il signalait comment doubler le nombre de côtés d'un polygone.

Triangle équilatéral et carré.

Personne ne put en obtenir d'autres avant 1796. A cette date, Carl Friedrich Gauss démontra qu'un polygone régulier à nombre impair de côtés était constructible si et seulement si ce nombre était un nombre premier de la forme $2^{(2^n)}+1$ ou une combinaison de tels nombres.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Né à Brunswick.

Le génie de Gauss apparut dès son plus jeune âge. A l'école élémentaire, un jour le professeur proposa aux élèves de calculer la somme des 100 premiers entiers. Quelques secondes plus tard, le petit Gauss annonça le résultat :
$1+2+3+\ldots+50+51+\ldots+98+99+100=101\times 50=5050$,
en remarquant que :
$1+100=2+99=3+98=\ldots=50+51=101$.

Les nombres de la forme $2^{(2^n)}+1$, où n est un entier, ont été étudiés pour la première fois par Pierre de Fermat en 1640. Il croyait avoir trouvé une formule ne donnant que des nombres premiers.
Les cinq premiers nombres de Fermat, comme on les appelle, sont :
$2^{(2^0)}+1=2^1+1=3$,
$2^{(2^1)}+1=2^2+1=5$,
$2^{(2^2)}+1=2^4+1=17$,
$2^{(2^3)}+1=2^8+1=257$,
$2^{(2^4)}+1=2^{16}+1=65537$.
Ces nombres sont effectivement des nombres premiers mais Leonhard Euler prouva, en 1732, que le $6^{\text{ème}}$ nombre de Fermat, $2^{(2^5)}+1$, était divisible par 641 et par conséquent, non premier.
En 2006, on ignore s'il existe d'autres nombres de Fermat premiers.