Galileo Galilei et les limites

Dès la classe de 1ère , on étudie les limites des fonctions usuelles et de suites particulières.
Si l'on considère un nombre limité de quantités variables, si chacune de ces quantités tend vers 0, la somme tend évidemment vers 0. Il n'en est pas nécessairement de même si le nombre de ces quantités est illimité.
Au 3ème siècle avant notre ère, Archimède a été l'un des premiers à étudier le comportement d'une somme ayant un nombre illimité de termes. Il a ainsi introduit la somme des inverses des puissances de 2 et a montré que, quand le nombre de termes de cette somme augmente indéfiniment, la somme tend vers une limite l .
Nous écrivons donc :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=l.$$

Calculons l :

$$2l=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$$

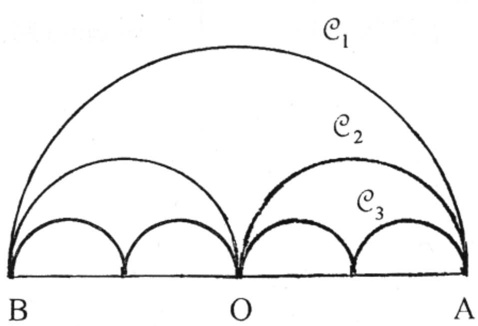
D'où : $2l=1+l$. Donc : $l=1$.
En 1636, Galilée a étudié le comportement de plusieurs suites de courbes. Il a ainsi mis en évidence que la limite de la longueur d'une telle suite n'est pas nécessairement la longueur de la limite de cette suite.

Galileo Galilei (1564-1642)

Né à Pise.

Entrant un jour dans la cathédrale de Pise, Galilée observa les oscillations de l'énorme lustre qui s'y trouve encore. On raconte qu'il eût ainsi l'idée de l'étude mathématique du mouvement du pendule.

Traçons un demi-cercle C_1 de diamètre AB = 2, de centre O et une courbe C_2 formée de deux demi-cercles ayant pour diamètres OA et OB.
La longueur de C_1 est : π , celle de C_2 est la somme : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ et elle est donc égale à la longueur de C_1. En continuant la même construction indéfiniment, on a toujours la même somme à chaque construction.
La limite de la suite de courbes C_1, C_2, C_3, …
est pourtant le segment [AB], de longueur 2.



Il faudra attendre 1865 pour que Karl Weierstrass donne, de façon rigoureuse, la définition d'une limite et l'explication de ce paradoxe.