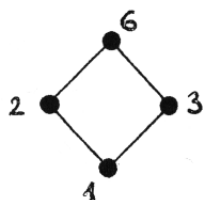


Euclide et les nombres parfaits

Dès la classe de 3^{ème}, on étudie systématiquement les propriétés des entiers et de leurs diviseurs. Ainsi, utilise-t-on l'algorithme d'Euclide pour trouver le plus grand commun diviseur de deux entiers.

Au 3^{ème} siècle avant notre ère, pour « mesurer » la divisibilité d'un entier, Euclide a comparé ce nombre à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire à l'exclusion de lui-même.

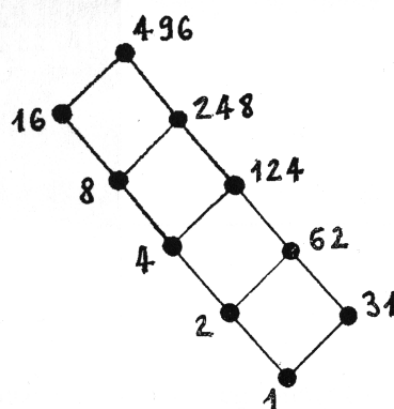
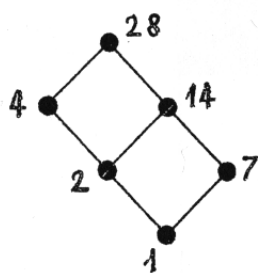
On appelle nombre parfait tout entier égal à la somme de ces diviseurs propres. Par exemple, 6, 28 et 496 sont des nombres parfaits. Nous utiliserons ici les diagrammes des diviseurs introduits au 20^{ème} siècle par Helmut Hasse.



$$6 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$



Euclide a démontré le théorème suivant :

« Si autant de nombres que l'on veut, en commençant par l'unité, sont obtenus par une suite à double proportion jusqu'à ce que la somme de tous devienne un nombre premier, et si on forme un nombre en multipliant le premier par le dernier, alors ce produit sera un nombre parfait ». [10]

Par exemple, ceci signifie que, en faisant la somme :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 127 = 2^7 - 1,$$

puis en effectuant le produit :

$$2^6 \times (2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8128,$$

on obtient le 4^{ème} nombre parfait.

Euclide a donc prouvé que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ est un nombre parfait.

En 1603, Pietro Cataldi trouve les trois nombres parfaits suivants : $2^{12} \times (2^{13} - 1)$,

$$2^{16} \times (2^{17} - 1) \text{ et } 2^{18} \times (2^{19} - 1).$$

Les nombres de la forme $2^n - 1$ sont étudiés pour la première fois par Marin Mersenne en 1644.

En 1772, Leonhard Euler établit une réciproque au théorème d'Euclide :

tout nombre parfait pair est de la forme $2^{n-1} \times (2^n - 1)$, où $2^n - 1$ est un nombre premier.

Ainsi, la connaissance des nombres parfaits pairs revient désormais à celle des nombres premiers de Mersenne (voir [Leonardo Fibonacci et les suites](#)).

En 2006, on ignore si l'ensemble des nombres parfaits est fini ou infini et on conjecture qu'il n'existe pas de nombre parfait impair.