Similitudes / Complexes

[Antilles Sept.2002]

EXERCICE 2 **enseignement de spécialité**

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que

$$AC = BD \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC] , [CD] et [DA].
On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. **a.** Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

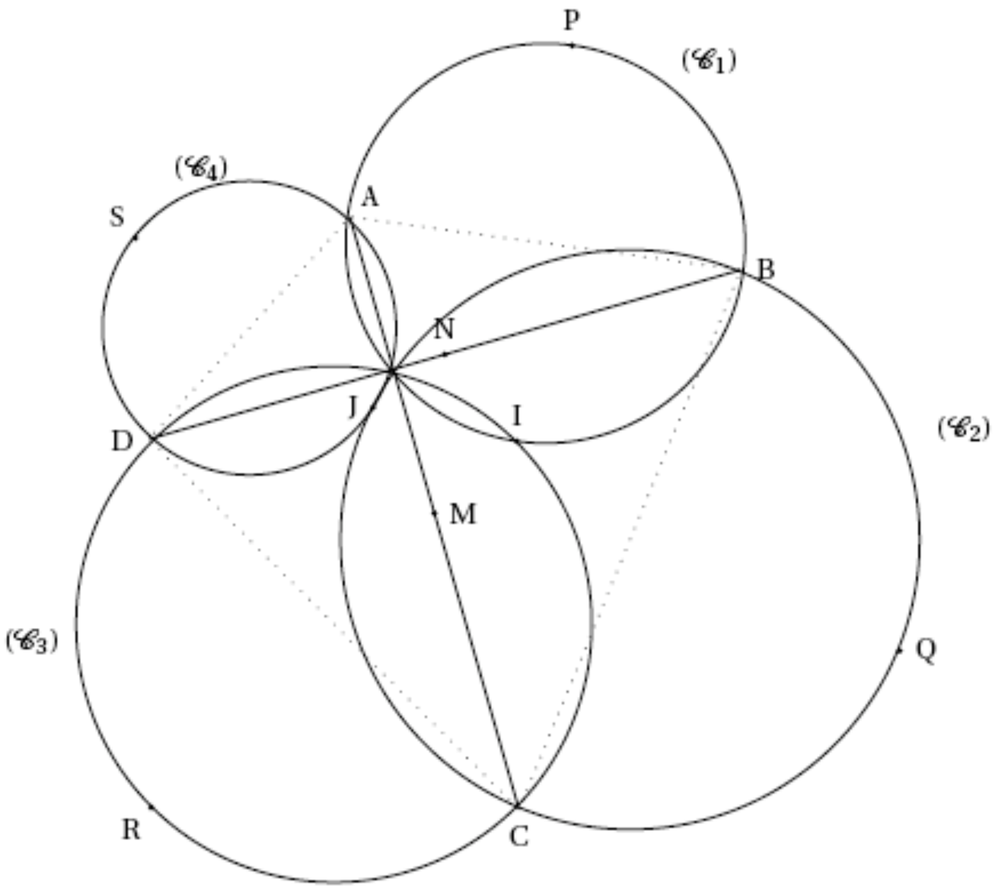
   b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

   c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM? On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

   b. En déduire que J est le milieu de [PR].



Similitudes / Complexes

[France Sept.2000]

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. **a.** Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

   b. Représenter les points A, B, C et D.

   c. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.

3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.

4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.

5. Déterminer l'affixe f du point F.

6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$$Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.

   a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe Z_1, associe le point M_1' d'affixe Z_1', telle que :

$$Z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

   b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que :

$$r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(AO)}.$$

   c. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(AO)}$. En déduire la nature de φ.