EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -4 - i$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

   b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-i}{2}z + \dfrac{-3+i}{2}$.

   c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

   d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.
   Vérifier la relation : $\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_nA_{n+1}$.

   a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   a. Exprimer v_n en fonction de n.

   b. La suite (v_n) est-elle convergente?

4. **a.** Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle ΩA_nA_{n+1}.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n :
   si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

Exercice de spécialité **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonorrnal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère l'application f qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
On désigne par A et O les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et i.

1. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et de rayon 1, privé de O.
   a. Pour tout nombre complexe z non nul, démontrer que :
   $$\left|z' + \text{i}\right| = \left|z'\right| \quad \text{équivaut à} \quad |z + \text{i}| = 1.$$
   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_1'$, image de $\mathscr{C}_1$ par f.
   c. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1'$ sur une même figure.
2. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z non nul,
   $\left|z' - \text{i}\right|^2 = 2$ équivaut à $|z + \text{i}|^2 = 2$ (on pourra utiliser $|Z^2| = Z\overline{Z}$).
   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_2'$ image de $\mathscr{C}_2$ par f.
   c. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2'$ sur la figure précédente.