Transformations - Isométries - Similitudes directes - Symétries axiales
[Calculatrices non autorisées]

EXERCICE 1 [5 points]

Composition de deux homothéties dans le plan complexe.
Soit h_1 l'homothétie de centre A d'affixe $z_A = 2$ et de rapport 3/2.
Soit h_2 l'homothétie de centre B d'affixe $z_B = 2\,i$ et de rapport 2.
Soit h la transformation composée $h_2 \circ h_1$

1. Écrire les équations des transformations complexes associées à h_1 et à h_2.
2. Écrire l'équation de la transformation complexe associée à $h = h_2 \circ h_1$
3. Démontrer que h admet un point fixe unique C dont on calculera les coordonnées.
4. Démontrer que h est une homothétie de centre C dont on déterminera le rapport.
5. Démontrer que le point C est aligné avec les points A et B et préciser sa position sur la droite (AB).

EXERCICE 2 [5 points]

Partie A
On suppose connu le résultat suivant :
Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \text{i},\ z_B = 1 - \text{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_D = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1.
   a. Donner le module et un argument-de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
   b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
   c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.
   b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.
   c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

EXERCICE 3 [5 points]

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_I = 1 \text{ , } z_J = i \text{ , } z_H = 1+i \text{ , } z_A = 2 \text{ , } z_B = \frac{3}{2}+i \text{ , } z_C = 2i \text{ et } z_D = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.
   Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$.
3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$$z' = -i\overline{z} + 2i.$$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.
2. **a.** Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
   a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -i\overline{z} + 1 + i$.
   b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.
   c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

EXERCICE 4 [5 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = ze^{\frac{5i\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p, montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est multiple de 12.
4. a. On considère l'équation (E) $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4, 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).
b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.