Calcul de e par encadrement d'une suite d'intégrales

On pose $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}\quad x\geq 0,\ I_n(a)=\int_0^a f_n(x).dx$

1. Calcul de $I_0(a)=\int_0^a f_0(x).dx=\int_0^a e^{-x}.dx=\left[-e^{-x}\right]_0^a=1-e^{-a}$

2. $f_n'(x)=\dfrac{1}{n!}(x^n e^{-x})'=\dfrac{1}{n!}(nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x})=\dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}-\dfrac{x^n e^{-x}}{n!}=f_{n-1}(x)-f_n(x)\quad et\quad f_n(0)=0\times e^{-1}=0\quad CQFD.$

En intégrant les deux membres de l'égalité $f_{n-1}(x)-f_n(x)=f_n'(x)$ et en application de la linéarité de l'intégration on a : $\int_0^a f_{n-1}(x).dx-\int_0^a f_n(x).dx=\int_0^a f_n'(x).dx$

et en appliquant la définition de I_n et le Théorème Fondamental de l'analyse : ($n\geq 1$)

$$I_{n-1}(a)-I_n(a)=\left[f_n(x)\right]_0^a=f_n(a)-f_n(0)=\frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

3. Par sommation membre à membre de l'égalité obtenue pour tout $n\geq 1$, on obtient :

$$\begin{cases} I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}\\ I_{n-1}(a)-I_{n-2}(a)=-\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}e^{-a}\\ I_{n-2}(a)-I_{n-3}(a)=-\dfrac{a^{n-2}}{(n-2)!}e^{-a}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ I_1(a)-I_0(a)=-\dfrac{a}{1!}e^{-a}\\ ==================== \end{cases}$$

$$I_n(a)-I_0(a)=-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}\quad avec\quad I_0=1-e^{-a}=1-\frac{a^0}{0!}e^{-a}$$

$$d'où\quad I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$$

4. En particulier pour a=1 on obtient $u_n=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)e^{-1}=I_n(1)=\int_0^1 f_n(x).dx$.

   a. La fonction f_n étant positive sur l'intervalle [0 ; 1], l'intégrale u_n représente donc la mesure de l'aire du domaine plan situé entre la courbe (C_n) et l'axe Ox sur l'intervalle [0 ; 1]. (U.A. = 4x4 cm^2 = 16 cm^2

   b. Pour tout x dans l'intervalle [0 ; 1], on a $e^{-1}\leq e^{-x}\leq e^0=1$ donc en multipliant les deux membres par $x^n/n!$ on obtient l'inégalité demandée : $0\leq f_n(x)\leq\dfrac{1}{n!}x^n$

   c. et donc en intégrant sur [0 ; 1], on obtient : $0\leq\int_0^1 f_n(x)dx\leq\int_0^1\dfrac{1}{n!}x^n.dx=\dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

   c'est à dire $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{(n+1)!}$ donc Lim(u_n) = 0 (« Théorème des gendarmes »).

   d. On en déduit finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)e^{-1}\right]=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)e^{-1}\right]=1$

   d'où la formule fondamentale : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)=e$ ce que l'on écrit sous la forme : $e=\sum_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}$

   ou encore : $e=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots=2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$ formule qui permet de calculer une valeur approchée du nombre e avec autant de précision que l'on veut !