Baccalauréat La Réunion série S juin 2003

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. **a.** Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

   b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x.$$

   a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

   b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.

   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{e^x}{x}\,dx$.

   a. Interpréter géométriquement $\mathscr{A}(a)$.

   b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   En remarquant que $\mathscr{A}(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $]0\,;\,+\infty[$ associe le réel $\mathscr{A}(a)$.

   c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes $\mathscr{C}_0$ et (Ox) soit minimale. Comment doit-on procéder ?

Annexe du problème