1°) Soit l'application $f : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \quad M \neq A \\ z \mapsto z' = i\dfrac{z-3i}{z+1} \quad z \neq z_A = -1 \end{cases}$ *On cherche l'affixe* z_D *du point D dont l'image par f est le point C d'affixe* $z_c = 2 - i$ *. Ainsi C = f(D)* $\Leftrightarrow$

$$z_C = i\frac{z_D - 3i}{z_D + 1} \Leftrightarrow 2 - i = i\frac{z_D - 3i}{z_D + 1} \Leftrightarrow (2-i)(z_D+1) = i(z_D - 3i) \Leftrightarrow (2-2i)z_D = 3-(2-i) \Leftrightarrow$$

$$(2-2i)z_D = 1+i \quad d'où\ z_D = \frac{1+i}{2-2i} = \frac{(1+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{4i}{4-4i^2} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i \quad n'en\ déplaise\ à\ Sarah\ D.....$$

2°) Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A car le rapport

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2-i+1}{3i+1} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{(-i)(1+3i)}{1+3i} = -i \text{ donc } (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

et de plus $\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |-i| = 1$ *c'est à dire AB = AC.*

3°) $OM' = |z'| = \left|i\dfrac{z-3i}{z+1}\right| = |i|.\dfrac{|z-3i|}{|z+1|} = 1.\dfrac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \dfrac{\|\overrightarrow{BM}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \dfrac{BM}{AM}$

et $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = Arg(z') = Arg\left(i\dfrac{z-3i}{z+1}\right) = Arg(i) + Arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) \quad [2\pi]$

4°) a) M' appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 ssi OM'=1 c'est à dire que MA = MB. L'ensemble (E) des points M du plan vérifiant cette condition est donc la médiatrice du segment [AB].

b) M' a une affixe Réelle si et seulement si :

$$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

c'est à dire que le triangle AMB est rectangle en M et donc que l'ensemble (F) des points M vérifiant cette condition est le cercle de diamètre [AB].

NB : on peut aussi traiter cette dernière question algèbriquement en déterminant la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' = x'+iy' à partir de z = x + iy. On on écrit alors la condition z' est Réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On trouve alors l'équation du cercle de diamètre AB