

Bac S Polynésie 2001

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right)$ (1).

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
 $OM' = BM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo 2π).
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
 - a. L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O, de rayon 1.
 - b. L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On note C_1 l'image de C par R.
 - a. Déterminer l'affixe de C_1 .
 - b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble E.