PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne. Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. **a.** Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E')} \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

b. Résoudre (E').

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{M}{1+Ce^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{M}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{M}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.

Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;1)$ et $(0{,}5\,;2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que $g(0) = N_0$ et que $M = 100\,N_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1+99\times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

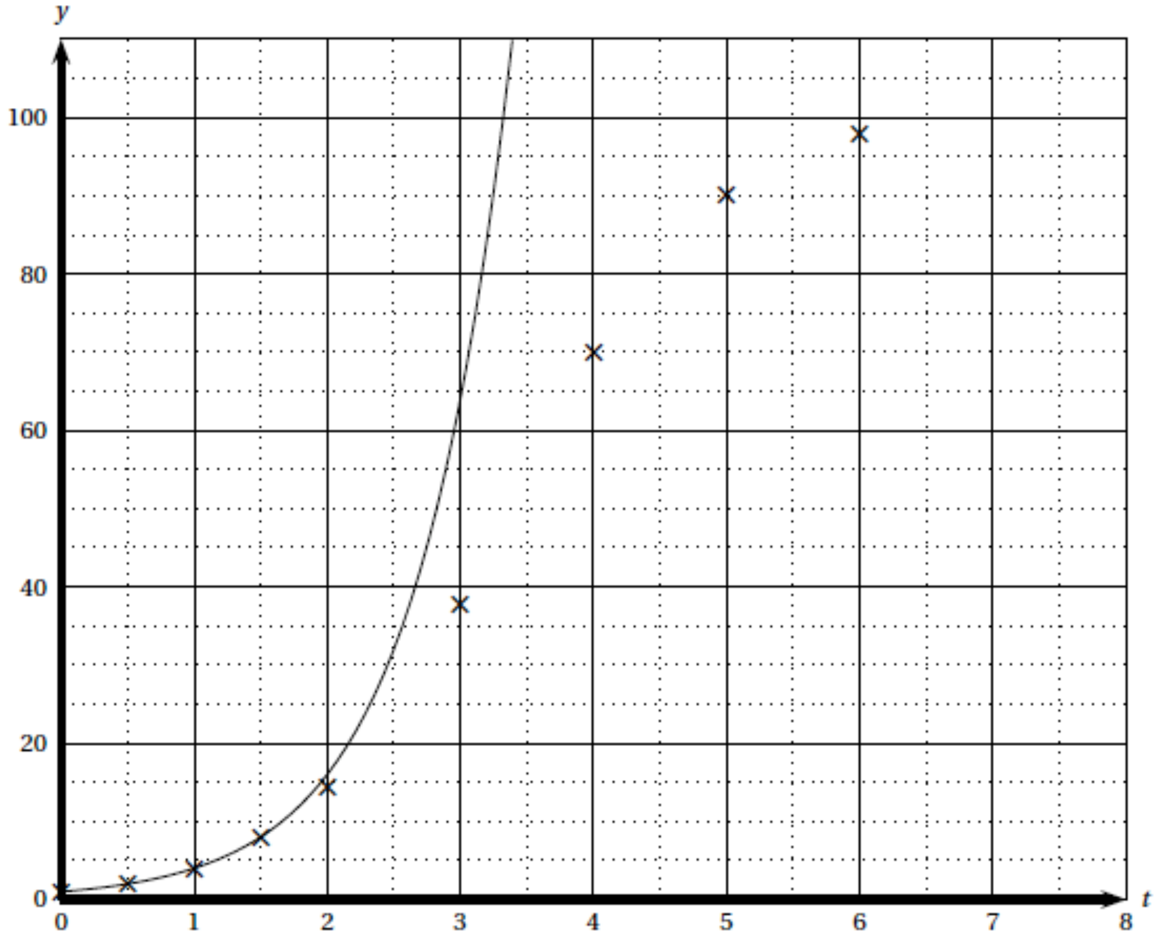
Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II



EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - \text{i}$ et $c = 1 + \text{i}$.

1. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure.

   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. **a.** On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\text{B}) = \text{C}$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\text{D} = r(\text{C})$.

   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$.

   b. Exprimer z' en fonction de θ.

   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

Exercice 1 **5 points**

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.
Soit X la variable alatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?
3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :
   - soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,
   - soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

   Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?