Fonction exponentielle • Détermination des zéros de la dérivée • Courbe

Exercice [Pondichéry Mars 2003] - N°14 p.154 / Annales NATHAN / Bac 2009

Conjectures

a. D'après ce que l'on voit sur l'écran, il semble que la fonction f soit croissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.

b. Il semble que la courbe soit située au-dessous de l'axe $(x'x)$ lorsque x appartient à $[-3\ ;\ 0]$ et au-dessus de l'axe $(x'x)$ lorsque x appartient à $[0\ ;\ 2]$.

Partie A : Contrôle de la première conjecture

1. Calcul de $f'(x)$ pour tout réel x

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x \\ &= x(2e^{x-1} + xe^{x-1} - 1) \\ &= x[(x+2)e^{x-1} - 1] \\ f'(x) &= xg(x) \end{aligned}$$

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel

a. Limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e}\, e^x = +\infty \end{cases}$$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x+2)e^{x-1} - 1] = +\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, les produit $(x+2)e^{x-1}$ présente une forme indéterminée du type $(+\infty) \times 0$. Pour lever l'indétermination, écrivons $g(x)$ sous une autre forme :

Pour tout réel x, $g(x) = xe^{x-1} + 2e^{x-1} - 1$

$$= \frac{1}{e}\, xe^x + \frac{2}{e}\, e^x - 1\ ;$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{1}{e}\, xe^x + \dfrac{2}{e}\, e^x - 1\right] = -1$.

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1.}$

b. Calcul de $g'(x)$ et étude de son signe

Pour tout réel x, $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout x réel :

$$g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = (x+3)e^{x-1}.$$

Pour tout réel x, e^{x-1} est strictement positif, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$.
Pour tout réel x de $]-\infty\,;-3[$, $x+3<0$ donc $g'(x)<0$;
Pour tout réel x de $]-3\,;+\infty[$, $x+3>0$ donc $g'(x)>0$;
$g'(3)=0$.

c. Sens de variation de g

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;-3]$ et strictement croissante sur $[-3\,;+\infty[$.
Le tableau de variation de g est donc le suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

d. Étude de l'équation $g(x)=0$

D'après l'étude des variations de g, on constate que g est majorée par -1 sur $]-\infty\,;-3]$ donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;-3]$.
Sur l'intervalle $[-3\,;1]$, g est continue, strictement croissante. L'image par g de l'intervalle $[-3\,;1]$ est l'intervalle $[-e^{-4}-1\,;2]$. Le nombre 0 appartient à $[-e^{-4}-1\,;2]$ car $-e^{-4}-1$ est strictement négatif. Donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[-3\,;1]$.
Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, g est strictement croissante et pour tout réel x de $[1\,;+\infty[$ on a $g(x)\geqslant g(1)$ soit $g(x)\geqslant 2$. L'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
En conclusion, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à $[-3\,;1]$. Montrons que α est élément de $[0{,}20\,;0{,}21]$.
À l'aide de la calculatrice on obtient :

$$g(0{,}20)\approx -0{,}011 \quad \text{et} \quad g(0{,}21)\approx 0{,}003.$$

g étant continue strictement croissante sur $[0{,}20\,;0{,}21]$ et sachant que $g(0{,}20)\cdot g(0{,}21)<0$, l'équation $g(x)=0$ a une solution unique α dans $]0{,}20\,;0{,}21[$.
L'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x)$ appartient à $]0{,}20\,;0{,}21[$.

e. Signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

• D'après le tableau de variation de g, on a pour tout réel x de $]-\infty\,;-3]$:

$$g(x)<0.$$

• Sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, g est strictement croissante, donc :
si $x\in[-3\,;\alpha[$, $g(x)<g(\alpha)$ soit $g(x)<0$;
si $x=\alpha$, $g(\alpha)=0$;
si $x\in\,]\alpha\,;+\infty[$, $g(x)>g(\alpha)$ soit $g(x)>0$

En résumé, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

a. Signe de $f'(x)$

On a montré au 1. que, pour tout réel x, $f'(x) = xg(x)$.

Le signe de $f'(x)$ est celui du produit $xg(x)$ donné par le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f'(x)$ est donc strictement positif si $x < 0$ ou si $x > \alpha$;

$f'(x)$ est strictement négatif si $0 < x < \alpha$;

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \alpha$.

b. Sens de variation de f

Connaissant le signe de $f'(x)$, pour tout réel x, on en déduit le sens de variation de f:

sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]\alpha ; +\infty[$ f est strictement croissante ;

sur $]0 ; \alpha[$ f est strictement décroissante.

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

c. La première conjecture est **fausse** car f n'est pas croissante sur $[-3 ; 2]$.

Partie B : Contrôle de la deuxième conjecture

1. Calcul de $f(\alpha)$

Le réel α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$g(x) = 0.$$

On a donc $g(\alpha) = 0$. Cette égalité est équivalente à :

$$(\alpha + 2)e^{\alpha - 1} - 1 = 0.$$

et à $e^{\alpha - 1} = \dfrac{1}{\alpha + 2}$ car $\alpha + 2 \neq 0$ $(\alpha \approx 0{,}2)$.

En remplaçant $e^{\alpha - 1}$ par $\dfrac{1}{\alpha + 2}$ dans l'expression de $f(\alpha)$ on obtient :

$$f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha - 1} - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{\alpha+2}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{2\alpha^2-(\alpha+2)\alpha^2}{2(\alpha+2)}$$

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}.}$$

2. Étude de la fonction *h* et encadrement de $f(\alpha)$

a. Soit h définie sur $[0\,;\,1]$ par $h(x)=\dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

h est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et on a, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$:

$$h'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-3x^2(x+2)+x^3}{(x+2)^2}=\frac{-2x^3-6x^2}{2(x+2)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

Pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, $x^2\geqslant 0$, $x+3>0$ et $(x+2)^2>0$, donc pour tout réel x de $]0\,;\,1]$, $h'(x)<0$ et $h'(0)=0$.

h est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et donc sur $[0{,}20\,;\,0{,}21]$.

b. On a alors :

$$0{,}20<\alpha<0{,}21$$

$$h(0{,}20)>h(\alpha)>h(0{,}21)$$

$$h(0{,}20)\approx-0{,}001\,8 \quad\text{et}\quad h(0{,}21)\approx-0{,}002\,1$$

D'où un encadrement de $f(\alpha)=h(\alpha)$:

$$\boxed{-0{,}002\,1<f(\alpha)<-0{,}001\,8.}$$

3. Position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses

a. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0$, équivalente, pour tout réel x, à :

$$x^2\left(e^{x-1}-\frac{1}{2}\right)=0$$

et à : $$x^2=0 \quad\text{ou}\quad e^{x-1}=\frac{1}{2}.$$

- L'équation $x^2=0$ a pour solution $x=0$.
- L'équation $e^{x-1}=\dfrac{1}{2}$ a ses deux membres strictement positifs, elle est donc pour tout réel x, équivalente à :

$$x-1=\ln\frac{1}{2}$$

$$x=1-\ln 2.$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 0$ ou $x = 1 - \ln 2$.
$\mathscr{C}$ admet 2 points communs avec l'axe des abscisses :

les points de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ et $(1 - \ln 2\ ;\ 0)$.

b. La position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de $f(x)$.

Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f(x)$ est celui de $e^{x-1} - \frac{1}{2}$.

Pour tout réel x, $e^{x-1} - \frac{1}{2} > 0$ si et seulement si :

$$e^{x-1} > \frac{1}{2}$$

Les deux membres étant strictement positifs et la fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient l'inéquation équivalente aux précédents :

$$x - 1 > \ln \frac{1}{2}$$

$$x > 1 - \ln 2$$

D'où le tableau donnant le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

x	$-\infty$		0		$1 - \ln 2$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$e^{x-1} - \frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que :
sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ 1 - \ln 2[$, $\mathscr{C}$ **est au-dessous de l'axe** $(x'x)$;
sur $]1 - \ln 2\ ;\ +\infty[$, $\mathscr{C}$ **est au-dessus de l'axe** $x'x$;
$\mathscr{C}$ est **tangente** à $(x'x)$ au point O et **coupe** l'axe $(x'x)$ au point d'abscisse $1 - \ln 2$.

c. La deuxième conjecture est également **fausse** car $\mathscr{C}$ est au-dessous de $(x'x)$ pour des réels x strictement positifs.

Partie C : Tracé de la courbe

1. Tableau de valeurs

x	$-0,20$	$-0,15$	$-0,10$	$-0,05$	0
$f(x)$	-80×10^{-4}	-41×10^{-4}	-17×10^{-4}	-4×10^{-4}	0

x	$0,05$	$0,10$	$0,15$	$0,20$	$0,25$
$f(x)$	-3×10^{-4}	-9×10^{-4}	-16×10^{-4}	-20×10^{-4}	-17×10^{-4}

x	0,30	0,35	0,40
$f(x)$	-3×10^{-4}	27×10^{-4}	78×10^{-4}

2. Tracé de Γ