EXERCICE 1 [N°10 p. 154 / Bac 2009 / Nathan]

1. ***g(x)* = *x* cos *x* – sin *x*** pour $x \in [0\,;\pi]$. La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur [0 ; π]. ***g'(x)* = cos *x* – *x* sin *x* – cos *x* = - *x* sin *x*.** Donc g'(x) négatif ou nul sur [0 ; π]. Par suite g est strictement décroissante sur [0 ; π] et comme g(0) = 0, on en déduit g(x) ≤ 0 sur [0 ; π].

2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *pour* $x \in]0;\pi]$ *et* $f(0) = 1$. donc pour $x \in]0\,;\pi]$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

3. Pour étudier la dérivabilité de f en 0, les formules ne s'appliquent pas et il faut donc calculer directement la limite du taux d'accroissement de f en 0, c'est à dire :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}$$

Pour cela on va rechercher un encadrement du numérateur.

On pose $\varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \Rightarrow \varphi'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \varphi''(x) = -\sin x + x \Rightarrow \varphi'''(x) = 1 - \cos x$

On observe alors successivement en partant de *φ'''(x) que :*

a. *φ'''(x)≥ 0 sur* [0 ; π] donc *φ'' croissante sur* [0 ; π] et *φ''(0) = 0, donc …*

b. *φ''(x)≥ 0 sur* [0 ; π] donc *φ' croissante sur* [0 ; π] et *φ'(0) = 0 donc…*

c. *φ'(x)≥ 0 sur* [0 ; π] donc *φ croissante sur* [0 ; π] et *φ(0) = 0 donc…*

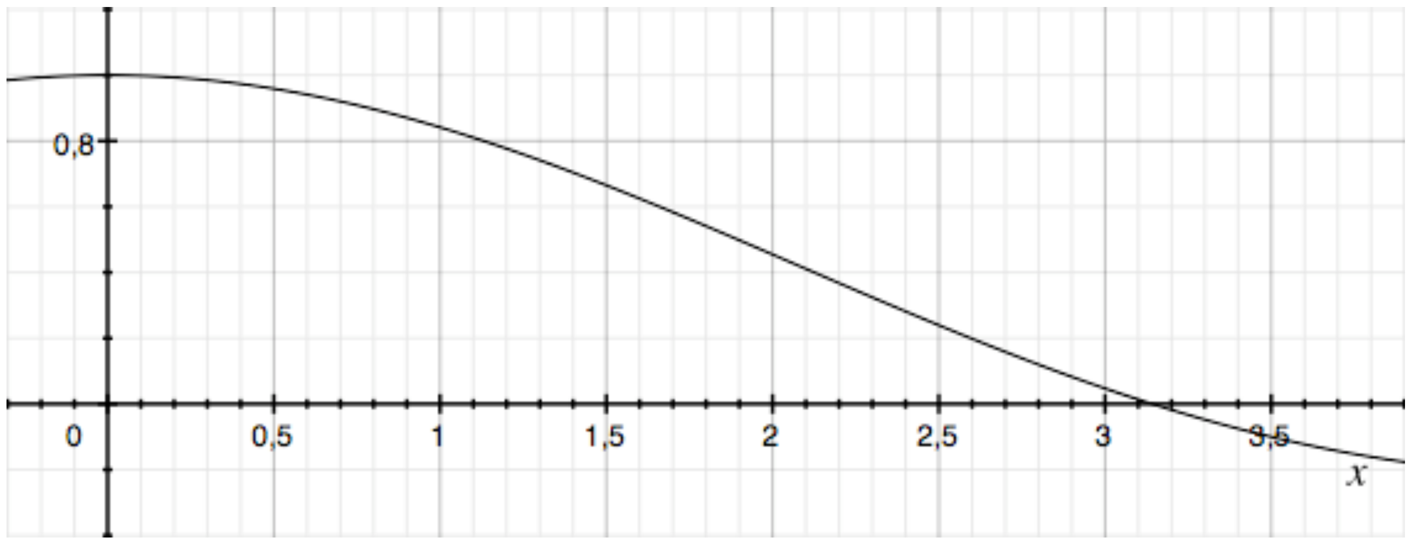
d. *φ(x)≥ 0 sur* [0 ; π] donc $\sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \geq 0$ *d'où* $x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$ et …

e. comme *φ''(x)≥ 0 on a aussi (x – sin x)≥ 0 d'où la double inégalité demandée :*

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} \textit{ et par suite } 0 \leq \frac{x-\sin x}{x^2} \leq \frac{x}{6}$$

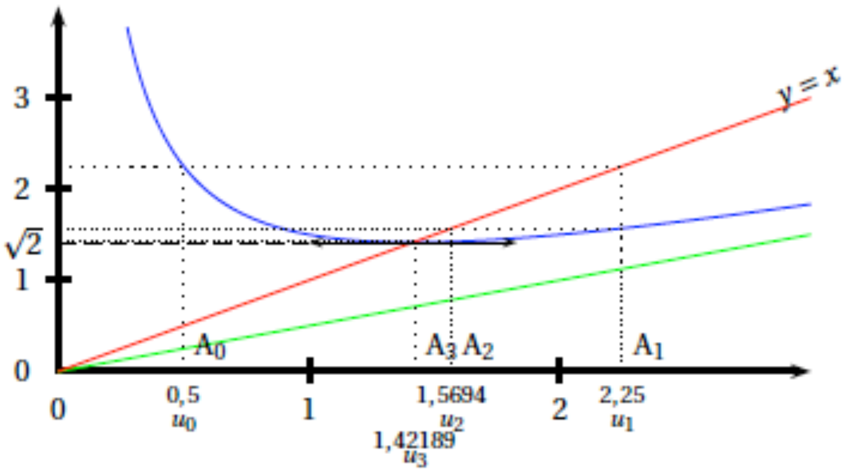
f. D'après les théorèmes d'encadrement on en déduit que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$,

g. Ce qui permet d'affirmer que la fonction *f* est dérivable en 0 et que *f '(0) = 0.*



EXERCICE 2 [N°20 p. 166 / Nelle-Calédonie nov. 2006 / Bac 2009 / Nathan]

1. **a.** La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$.
le signe de f' est donc celui de x^2-2, car $x^2>0$, pour $x>0$.
Or sur $]0\,;+\infty[$, $x^2-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{2}$.
La fonction est :
– décroissante sur $]0\,;\sqrt{2}[$;
– croissante sur $]\sqrt{2}\,;+\infty[$.
D'où la courbe représentative de f :



2. **a.** On a quel que soit n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) = f(u_n)$.
On vient de voir que $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2{,}25 \geqslant \sqrt{2}$. L'affirmation est vraie au rang 1.
Supposons $u_n \geqslant \sqrt{2}$. D'après la question 1, la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$. Donc par application de cette croissance $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$. la relation est héréditaire.
Conclusion : quel que soit $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Soit $f(x) - x = \frac{x}{2}+\frac{1}{x}-x = \frac{1}{x}-\frac{x}{2} = \frac{2-x^2}{2x}$.
On a vu que si $x \geqslant \sqrt{2}$, $2-x^2 \leqslant 0$.
Conclusion : si $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x)-x \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant x$.

c. On a vu que pour $n>0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$; donc d'après la question précédente $f(u_n) \leqslant u_n$; or $f(u_n) = u_{n+1}$.
Conclusion : $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n>0$. La suite (u_n) est décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

3. La fonction f est définie et continue sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$; la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $\ell = f(\ell)$.
ℓ est donc solution de l'équation $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) = x \iff 2x = x+\frac{2}{x} \iff$
$2x^2 = x^2+2 \iff x^2 = 2 \iff x = \ell$, seule solution supérieure ou égale *à* $\sqrt{2}$
La suite (u_n) converge vers $\ell = \sqrt{2}$.

EXERCICE 3 [N°22 p. 168 / Pondichéry Avril 2005 / Bac 2009 / Nathan]

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \iff \dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leqslant 0,95\dfrac{n^{10}}{2^n}$
$\iff (n+1)^{10} \leqslant 1,9n^{10} \iff \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \iff \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$

2. **a.** La fonction $1+\dfrac{1}{x}$ étant dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$, la fonction f l'est aussi et
$f'(x) = 10\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) < 0.$
Donc f est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. On a $f(1) = 2^{10}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$,
d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10} = 1.$

b. Conclusion f est continue (car dérivable) et décroissante de 2^{10} à 1, donc bijective. Il existe donc un unique réel α de $[1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Avec la calculatrice on trouve que $f(15) > 1,9$ et $f(16) < 1,9$. Donc $n_0 = 16$.

d. On a $n \geqslant 16 \geqslant \alpha \Rightarrow f(n) \leqslant f(16) \leqslant f(\alpha)$ soit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. **a.** D'après la question **1.** et pour tout entier n supérieur à 16
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \iff u_{n+1} \leqslant 0,95u_n.$
Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 16.

b. Comme de plus $u_n \geqslant 0$ la suite (u_n) converge vers un réel supérieur ou égal à zéro.

4. • Initialisation : on a $u_{16} \leqslant 0,95^0 u_{16}$.
• Hérédité : hypothèse $0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}$. D'après la question **1.**
$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \leqslant 0,95 \times 0,95^{n-16} u_{16} \iff 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,95^{n-15} u_{16}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. On a donc pour tout naturel n supérieur ou égal à 16 : $0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}$.
Or $0,95^{n-16}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison telle que $-1 < 0,95 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^{n-16} = 0$. D'après l'encadrement démontré par récurrence et d'après le théorème des « gendarmes »

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 4 [N°101 p. 239 / Bac 2009 / Nathan]

$$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

1. On pose $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = e^{i\frac{\pi}{n}}$

   la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison z

$$T_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

$$z^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n = e^{i\pi} = -1 \Rightarrow T_n = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow T_n = \frac{2(1-e^{-i\frac{\pi}{n}})}{(1-e^{i\frac{\pi}{n}})(1-e^{-i\frac{\pi}{n}})} = \frac{2(1-e^{-i\frac{\pi}{n}})}{1+e^0-(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{-i\frac{\pi}{n}})} = \frac{2(1-e^{-i\frac{\pi}{n}})}{2-2\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1-e^{-i\frac{\pi}{n}}}{1-\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{-\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow T_n = 1 + i\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}} = 1 + i\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}} = 1 + i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1 + i\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$$\Rightarrow S_n = \mathrm{Im}[T_n] = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}} \qquad \textit{CQFD}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)\lim_{\frac{\pi}{2n}\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \left(\frac{2}{\pi}\right).1 = \frac{2}{\pi}$$

   En effet on sait que $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1$

   d'où le résultat en posant $x = \frac{\pi}{2n} \to 0 \quad quand \quad n \to \infty$.