Nombres Complexes et Suites Numériques

(Calculatrices autorisées)

EXERCICE I [3 pts] Quelques R.O.C. de mise en jambes …

1°) *Hypothèses : on donne 3 points distincts A, B, C, du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. et* $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

a. *Démontrer que A,B,C, sont alignés si et seulement si Z est Réel.*

Rép.: Z réel ⇔ Arg(Z) ≡ 0 [π] ⇔ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$ *⇔ A,B,C alignés. CQFD.*

b. *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si Z est imaginaire pur*

Rép.: Z imaginaire pur ⇔ Arg(Z) ≡ π/2 [π] ⇔ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ *⇔ BAC rectangle en A. CQFD.*

2°) *Hypothèses : soit (u_n) une suite numérique à termes Réels, définie par récurrence à l'aide d'une fonction numérique f, c'est à dire telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que f est croissante sur un intervalle [a;b] et que $[f(a);f(b)] \subset [a;b]$.*

a. *Démontrer par récurrence que si $u_0 \in [a ; b]$ alors quel que soit n, $a \le u_n \le b$.*

Rép. : Soit (P_n) la propriété $[a \le u_n \le b]$ à démontrer par récurrence sur n.

(i) INITialisation : par hypothèse on a $a \le u_0 \le b$ [VRAI]

(ii) HÉRÉdité : soit n fixé, montrons que l'implication $[(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})]$ est VRAIE

$(P_n) \Rightarrow [a \le u_n \le b]$ et f croissante sur [a ; b] $\Rightarrow f(a) \le f(u_n) \le f(b)$

or par hypothèse $a \le f(a)$ et $f(b) \le b$ donc $a \le f(u_n) \le b$ soit $a \le u_{n+1} \le$ i.e. (P_{n+1})

(iii) CONCLusion : par récurrence on peut affirmer que (P_n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. *Démontrer par récurrence que si $u_1 \le u_0$, alors la suite(u_n) est décroissante.*

Rép. : Soit (P_n) la propriété $[u_{n+1} \le u_n]$ à démontrer par récurrence sur n.

(i) INITialisation : par hypothèse $u_1 \le u_0$ [VRAI]

(ii) HÉRÉdité : soit n fixé, montrons que l'implication $[(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})]$ est VRAIE

$(P_n) \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ et f croissante sur [a ; b] $\Rightarrow f(u_{n+1}) < f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1} \Rightarrow (P_{n+1})$

(iii) CONCLusion : par récurrence on peut affirmer que (P_n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire que la suite (u_n) est décroissante.

Rép. (2e version « plus rapide »): $u_{n+1} \le u_n$ et f croissante sur [a ;b] $\Rightarrow f(u_{n+1}) \le f(u_n) \Rightarrow u_{n+1} \le u_n$ la propriété est donc héréditaire, et elle est vraie pour n=0 par hypothèse, alors par récurrence on peut affirmer qu'elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3°) *Hypothèses : soient deux suite numériques adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.*

a. *Démontrer que l'on a nécessairement : quelque soit n, $u_n \le v_n$.*

Rép.: raisonnement par l'absurde : en effet s'il n'en était pas ainsi il existerait un rang n_0 à partir duquel on aurait $v_{n0} < u_{n0}$, et donc pour tout $n \ge n_0$, on aurait – puisque (u_n) croissante et (v_n) décroissante : $v_n \le v_{n0} < u_{n0} \le u_n$ ce qui est absurde, car par déf. des suites adjacentes, $\lim(v_n - u_n) = 0$

b. *Démontrer que (u_n) et (v_n) ont nécessairement la même limite.*

Rép.: raisonnement par l'absurde : en effet (u_n) et (v_n) étant monotones et bornées sont convergentes, si $\lim(u_n) = l$ et $\lim(v_n) = l'$ avec $l \neq l'$, alors on aurait $\lim(v_n - u_n) = \lim(v_n) - \lim(u_n) = l' - l \neq 0$ ce qui est absurde car contraire à l'hypothèse de la déf. des suites adjacentes.

EXERCICE II [7 pts] Étude de suites composées : *(a_n) et (b_n) définies par la récurrence croisée :*

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \quad et \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n),\ a_0 = 2 ,\ b_0 = 4$$

A – Étude dans les nombres Réels.

On pose $U_n = a_n + b_n$; $V_n = a_n - b_n$; $P_n = a_n.b_n$; $Q_n = P_n - 9$

1°) *Démontrer que (U_n) est constante, indiquer cette constante.*

Rép.: $U_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{4}(4a_n + 4b_n) = a_n + b_n = U_n$ *donc pour tout n, $U_n = U_0 = a_0 + b_0 = 6$*

2°) *Démontrer que (V_n) est géométrique , indiquer sa raison et le premier terme*

Rép.: $V_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}(-2a_n + 2b_n) = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) = -\frac{1}{2}V_n$ donc (V_n) de raison $q = -\frac{1}{2}$ et $V_0 = -2$ d'où $V_n = (-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3°) *Exprimer a_n et b_n en fonction de n,*

Rép.: $a_n = \frac{U_n + V_n}{2} = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $b_n = \frac{U_n - V_n}{2} = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

4°) *Montrer que a_n et b_n sont convergentes vers une même limite et calculer cette limite.*

Rép.: $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 3$ car $\lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Nombres Complexes et Suites Numériques

(Calculatrices autorisées)

5°) Démontrer que (Q_n) est géométrique, indiquer sa raison et le premier terme.

Rép.: $Q_n = P_n - 9 = a_n b_n - 9 = \left[3-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\left[3+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] - 9 = 9 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 9 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$ donc $Q_0 = -1$, *raison* $q = \frac{1}{4}$

6°) Calculer P_n en fonction de n et indiquer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Rép.: $P_n = a_n b_n = \left[3-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\left[3+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 9 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ d'où $\lim P_n = 9 = \lim(a_n).\lim(b_n)$

B – Étude dans les nombres Complexes.

On pose $Z_n = a_n + ib_n$ et on appelle A_n son image dans le plan complexe.

1°) Calculer $(a_n)^2 + (b_n)^2$ en fonction de U_n et de P_n

Rép.: $(a_n)^2 + (b_n)^2 = (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n = (U_n)^2 - 2P_n$

2°) Exprimer $|Z_n|$ en fonction de n.

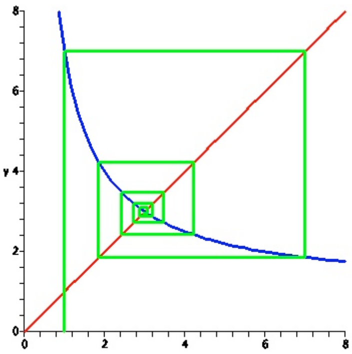
Rép.: $|Z_n| = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} = \sqrt{(U_n)^2 - 2P_n} = \sqrt{36 - 2\left[9 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]} = \sqrt{18 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3°) Calculer la limite de $|Z_n|$

Rép.: $\lim(|Z_n|) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

4°) Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers l'infini ?

Rép.: Le point A_n se rapproche indéfiniment par l'extérieur de la circonférence du cercle de centre O et de rayon $3\sqrt{2}$.



EXERCICE III - *[6pts] <u>Étude de la suite</u> (U_n) définie par $U_0 = 1$ et*

$U_{n+1} = 1 + \frac{6}{U_n}$ *3*

A – On pose f(x) = $1 + \frac{6}{x}$ *pour x > 0.*

1°) Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite (U_n) dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux).

2°) D'après la figure obtenue, la suite (U_n) est-elle monotone ? bornée ?

Rép.: (U_n) n'est pas monotone, mais elle est bornée par $U_0 = 1$ et $U_1 = 7$. De plus elle semble converger vers le point d'abscisse 3.

3°) Montrer par récurrence que quelque soit $n \in N$, on a $1 \leq U_n \leq 7$

Rép.: $1 \leq u_n \leq 7$ et f <u>décroissante</u> sur [1 ;7] $\Rightarrow f(1) \geq f(u_n) \geq f(7)$

*$\Rightarrow 7 \geq u_{n+1} \geq 13/7 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 7$ la propriété est donc <u>héréditaire</u>, et elle est vraie pour n=0 par hypothèse, alors par récurrence on peut affirmer qu'elle est vraie pour tout entier $n \in$ **N**.*

4°) Démontrer que la fonction f admet un point fixe α unique sur l'intervalle [1 ; 7].

Rép.: α point fixe de f $\Leftrightarrow$ α solution de l'équation f(x)= x $\Leftrightarrow$ $1 + \frac{6}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$

Donc α =3 seule solution dans [1 ;7], abscisse du point d'intersection de C(f) avec Δ(y=x).

B – On pose g(x) = $\frac{7x+6}{x+6}$ *, $V_n = U_{2n}$ suite des termes de rang pair et $W_n = U_{2n+1}$ la suite des termes de rang impair*

On se propose de démontrer que (V_n) et (W_n) sont adjacentes.

1°) Démontrer que g(x) = f[f(x)] et indiquer son sens de variation sur [1 ;7].

Rép.: $$f(f(x)) = f(1 + \frac{6}{x}) = 1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{x}} = 1 + \frac{6x}{x+6} = \frac{7x+6}{x+6} = g(x).$$ C.Q.F.D.

f étant décroissante sur [1 ;7], g= f ₒ f est <u>croissante</u> sur ce même intervalle.

2°) Montrer que $V_{n+1} = g(V_n)$ et de même que $W_{n+1} = g(W_n)$

Rép.: $g(V_n) = (f \circ f)(U_{2n}) = f(U_{2n+1}) = U_{2n+2} = U_{2(n+1)} = V_{n+1}$

de même $g(W_n) = (f \circ f)(U_{2n+1}) = f(U_{2n+2}) = U_{2n+3} = U_{2(n+1)+1} = W_{n+1}$

3°) Démontrer par récurrence que (V_n) est strictement croissante et que (W_n) est strictement décroissante.

Rép. : Soit (P_n) la propriété [$V_n < V_{n+1}$] à démontrer par récurrence sur n.

(i) INITialisation : $V_0 = u_0 = 1 < V_1 = g(V_0) = g(1) = 13/7$ [VRAI]

(ii) HÉRÉdité : soit n <u>fixé</u>, montrons que l'implication [(P_n) $\Rightarrow$ (P_{n+1})] est VRAIE

(P_n) $\Rightarrow V_n < V_{n+1}$ et g <u>croissante</u> sur [1 ;7] $\Rightarrow$ $g(V_n) < g(V_{n+1}) \Rightarrow$ $V_{n+1} < V_{n+2} \Rightarrow (P_{n+1})$

Nombres Complexes et Suites Numériques

(Calculatrices autorisées)

(iii) CONCLusion : par récurrence on peut affirmer que (P_n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire que la suite (V_n) est bien strictement croissante.
On démontre de même que (W_n) est décroissante en changeant le sens des inégalités.

4°) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \le V_n \le W_n \le 7$*

Rép. : Soit (P_n) la propriété $[1 \le V_n \le W_n \le 7]$ à démontrer par récurrence sur n.
(i) INITialisation : $V_0 = u_0 = 1 \le V_0 \le W_0 = u_1 = 7 \le 7$ [VRAI]
(ii) HÉRÉdité : soit n fixé, montrons que l'implication $[(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})]$ est VRAIE
$(P_n) \Rightarrow [1 \le V_n \le W_n \le 7]$ et g croissante sur $[1 ;7] \Rightarrow g(1) \le g(V_n) \le g(W_n) \le g(7)$
or $g(1) = 13/7 > 1$ et $g(7) = 55/13 < 7$ donc $1 \le V_{n+1} \le W_{n+1} \le 7$, i.e. (P_{n+1})
(iii) CONCLusion : par récurrence on peut affirmer que (P_n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

5°) *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n - V_n \le \frac{3}{4}(W_{n-1} - V_{n-1})$*

Rép.: $$W_n - V_n = g(W_{n-1}) - g(V_{n-1}) = \frac{7W_{n-1}+6}{W_{n-1}+6} - \frac{7V_{n-1}+6}{V_{n-1}+6} = \frac{36(W_{n-1}-V_{n-1})}{(W_{n-1}+6)(V_{n-1}+6)}$$

or pour tout n on a $1 \le u_n \le 7$, donc $7 \le W_{n-1} + 6 \le 13$ et $7 \le V_{n-1} + 6 \le 13$, par suite :

$$\frac{1}{13} \le \frac{1}{W_{n-1}+6} \le \frac{1}{7} \text{ et } \frac{1}{13} \le \frac{1}{V_{n-1}+6} \le \frac{1}{7} \text{ d'où } \frac{1}{(W_{n-1}+6)(V_{n-1}+6)} \le \frac{1}{49}$$

$$\text{d'où : } W_n - V_n \le \frac{36}{49}(W_{n-1}-V_{n-1}) \le \frac{36}{48}(W_{n-1}-V_{n-1}) \le \frac{3}{4}(W_{n-1}-V_{n-1}) \le 0{,}9(W_{n-1}-V_{n-1})$$

6°) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le W_n - V_n \le 6\left(\frac{3}{4}\right)^n$*

Rép. [1ère Version : » méthode des Dominos »] : on effectue le produit membre à membre des n inégalités du type $W_n - V_n \le \frac{3}{4}(W_{n-1} - V_{n-1})$ et on réduit les termes semblables :

$$\begin{array}{l} W_n - V_n \le \frac{3}{4}(W_{n-1} - V_{n-1}) \\ W_{n-1} - V_{n-1} \le \frac{3}{4}(W_{n-2} - V_{n-2}) \\ W_{n-2} - V_{n-2} \le \frac{3}{4}(W_{n-3} - V_{n-3}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ W_1 - V_1 \le \frac{3}{4}(W_0 - V_0) \\ \hline\hline W_n - V_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n (W_0 - V_0) \end{array}$$

donc $0 \le W_n - V_n \le 6\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Rép (2e version : par récurrence)

Soit (P_n) la propriété $\left[0 \le W_n - V_n \le 6\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$ à démontrer par récurrence sur n.

(i) INITialisation : $W_0 - V_0 = 7 - 1 = 6 \le 6\left(\frac{3}{4}\right)^0$ [VRAI]

(ii) HÉRÉdité : soit n fixé, montrons que l'implication $[(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})]$ est VRAIE

$(P_n) \Rightarrow \left[0 \le W_n - V_n \le 6\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$ et $W_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{3}{4}(W_n - V_n) \Rightarrow 0 \le W_{n+1} - V_{n+1} \le 6\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \Rightarrow. (P_{n+1})$

(iii) CONCLusion : par récurrence on peut affirmer que (P_n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7°) *En déduire la limite de $[W_n - V_n]$*

Rép.: d'après le théorème des gendarmes $\lim(W_n - V_n) = 0$ car $\lim 6\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (suite géom. de raison $q = 3/4$

Nombres Complexes et Suites Numériques

(Calculatrices autorisées)

8°) En déduire la limite de (V_n), (W_n) et (u_n).

Rép.: d'après ce qui précède les deux suites (V_n), (W_n) sont adjacentes donc ont la même limite α, ainsi que la suite (un) qui coïncide alternativement avec l'une et l'autre. Or f est continue sur [1;7] et $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\text{Lim}\,(u_{n+1}) = \text{Lim}[f(u_n)] = f\,[\text{Lim}(u_n)]$ d'où $\alpha = f(\alpha)$, i.e. α point fixe de f sur [1 ;7], donc $\alpha = 3$.

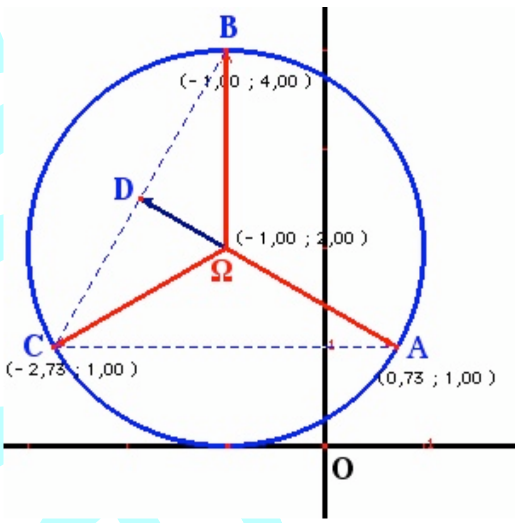
EXERCICE IV [4 points]

Dans plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A et Ω d'affixes respectives $a = -1 + \sqrt{3} + i$ et $\omega = -1 + 2i$.
On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle 2π/3, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport –1/2.

1°) Placer sur la figure les points A et Ω, puis l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.

2°) On note b, c, et d les affixes des points B, C, D. Le tableau suivant contient une suite de 18 affirmations dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne, dans les colonnes 2, 3 ou 4. IndiquerVRAI ou FAUX en toutes lettres dans chacune des cases du tableau.

1	$\lvert a - \omega \rvert =$	2 **VRAI**	4 **FAUX**	$\sqrt{3} - i$ **FAUX**
2	$\arg(a - \omega) =$	$-\frac{5\pi}{6}$ **FAUX**	$\frac{47\pi}{6}$ **VRAI**	$\frac{\pi}{6}$ **FAUX**
3	$\left(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg((\omega - c)i)$ **VRAI**	$\left(-\vec{v},\overrightarrow{C\Omega}\right)$ **VRAI**	$\frac{2\pi}{3}$ **VRAI**
4	$\omega =$	$\frac{1}{3}(a+b+c)$ **VRAI** (isobarycentre)	$a+b+c$ **FAUX**	$b - 2i$ **VRAI**
5	$\frac{b-d}{a-d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **FAUX**	$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **FAUX**	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$ **VRAI**
6	*Le point D est*	*L'image de Ω par la translation de vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$ **VRAI**	*L'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport* $\frac{3}{2}$ **VRAI**	*L'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle* $-\frac{\pi}{6}$ **FAUX**



La plupart des résultats sont observables sans calcul sur une figure soignée.

Nombres Complexes et Suites Numériques
(Calculatrices autorisées)

Démonstrations du IV par le calcul :

(1) ; (2) ; (3) ; (4) ; (5)

$$\left.\begin{array}{l} C = r_{[\Omega;\frac{2\pi}{3}]}(B) \Leftrightarrow c-\omega = e^{2i\frac{\pi}{3}}(b-\omega) \\ B = r_{[\Omega;\frac{2\pi}{3}]}(A) \Leftrightarrow b-\omega = e^{2i\frac{\pi}{3}}(a-\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow c-\omega = e^{4i\frac{\pi}{3}}(a-\omega)$$

$$a-\omega = (-1+\sqrt{3}+i)-(-1+2i) = \sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow |a-\omega| = 2 \quad et \quad \arg(a-\omega) = -\frac{\pi}{6} = \frac{47\pi}{6}-\frac{48\pi}{6} = \frac{47\pi}{6}-8\pi \equiv \frac{47\pi}{6}[2\pi] \quad CQFD$$

$$\Rightarrow c-\omega = e^{4i\frac{\pi}{3}}2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(4\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$b-\omega = e^{2i\frac{\pi}{3}}2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \Rightarrow \omega = b-2i \quad CQFD$$

$$\left(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega C}\right)-\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{C\Omega}\right)+\pi-\frac{\pi}{2} = \left(\vec{u},\overrightarrow{C\Omega}\right)+\frac{\pi}{2}$$

$$= \arg(\omega-c)+\arg(i) = \arg((\omega-c)i) \quad CQFD$$

$$\left(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(-\vec{v},\overrightarrow{C\Omega}\right) \quad (opposés\ par\ le\ sommet) \quad CQFD$$

$$\left(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega C}\right)-\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arg(c-\omega)-\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \quad CQFD$$

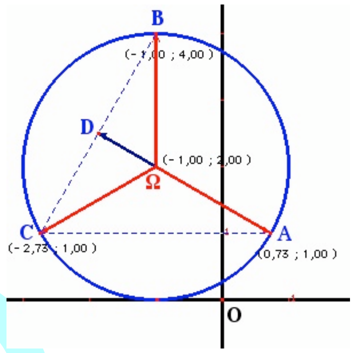
$$D = h_{[\Omega;-\frac{1}{2}]}(A) \Leftrightarrow d-\omega = -\frac{1}{2}(a-\omega)$$

$$= -\frac{1}{2}(2e^{-i\frac{\pi}{6}}) = -e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{5i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow d = \omega+-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = (-1+2i)+(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$\Rightarrow b-d = (-1+4i)-(-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i = \sqrt{3}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$et \quad a-d = (-1+\sqrt{3}+i)-(-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i = 3(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$



$$\frac{b-d}{a-d} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}i \quad CQFD$$

(6) le point D est l'image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$ car on a $\overrightarrow{\Omega D} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A} = +\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$

le point D est l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ car on a la relation

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{A\Omega}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega}$$

Enfin BD < BΩ donc D ne peut être l'image de Ω dans une rotation de centre B.

NB : Pour construire le point A et le point C on utilise le fait qu'ils appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 2 et que leur ordonnée est égale à 1. On ne doit pas utiliser une valeur approchée de √3.