Nombres Complexes et Suites Numériques

(Calculatrices autorisées)

EXERCICE I [3 pts] Quelques R.O.C. de mise en jambes …

1°) Hypothèses : on donne 3 points distincts A, B, C, du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

On pose $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

a. Démontrer que A,B,C, sont alignés si et seulement si Z est Réel.

b. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si Z est imaginaire pur

2°) Hypothèses : soit (u_n) une suite numérique à termes Réels, définie par récurrence à l'aide d'une fonction numérique f , c'est à dire telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que f est croissante sur un intervalle [a ; b] et que $[f(a); f(b)] \subset [a ; b]$.

a. Démontrer par récurrence que si $u_0 \in [a ; b]$ alors quel que soit n, $a \le u_n \le b$.

b. Démontrer par récurrence que si $u_1 \le u_0$, alors la suite(u_n) est décroissante.

3°) Hypothèses : soient deux suite numériques adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

a. Démontrer que l'on a nécessairement : quelque soit n, $u_n \le v_n$.

b. Démontrer que (u_n) et (v_n) ont nécessairement la même limite.

EXERCICE II [7 pts] Étude de suites composées : *(a_n) et (b_n) définies par la récurrence croisée :*

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \quad et \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n),\ a_0 = 2\ ,\ b_0 = 4$$

A – Étude dans les nombres Réels.

On pose $U_n = a_n + b_n$; $V_n = a_n - b_n$; $P_n = a_n.b_n$; $Q_n = P_n - 9$

1°) Démontrer que (U_n) est constante, indiquer cette constante.

2°) Démontrer que (V_n) est géométrique , indiquer sa raison et le premier terme

3°) Exprimer a_n et b_n en fonction de n,

4°) Montrer que a_n et b_n sont convergentes vers une même limite et calculer cette limite.

5°) Démontrer que (Q_n) est géométrique, indiquer sa raison et le premier terme.

6°) Calculer P_n en fonction de n et indiquer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

B – Étude dans les nombres Complexes.

On pose $Z_n = a_n + ib_n$ et on appelle A_n son image dans le plan complexe.

1°) Calculer $(a_n)^2 + (b_n)^2$ en fonction de U_n et de P_n

2°) Exprimer $|Z_n|$ en fonction de n.

3°) Calculer la limite de $|Z_n|$

4°) Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers l'infini ?

EXERCICE III - *[6pts] Étude de la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et* $U_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{U_n}$

A – On pose $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x}$ *pour x > 0.*

1°) Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite (U_n) dans un repère orthonormal (unité 2cm ou 2 carreaux).

2°) D'après la figure obtenue, la suite (U_n) est-elle monotone ? bornée ?

3°) Montrer par récurrence que quelque soit $n \in N$, on a $1 \le U_n \le 7$

4°) Démontrer que la fonction f admet un point fixe α unique sur l'intervalle [1 ; 7].

B – On pose $g(x) = \dfrac{7x+6}{x+6}$ *, $V_n = U_{2n}$ suite des termes de rang pair et $W_n = U_{2n+1}$ la suite des termes de rang impair. On se propose de démontrer que (V_n) et (W_n) sont adjacentes.*

1°) Démontrer que $g(x) = f[f(x)]$ et indiquer son sens de variation sur [1 ;7].

2°) Montrer que $V_{n+1} = g(V_n)$ et de même que $W_{n+1} = g(W_n)$

3°) Démontrer par récurrence que (V_n) est strictement croissante et que (W_n) est strictement décroissante.

Nombres Complexes et Suites Numériques

(Calculatrices autorisées)

4°) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in N$, on a $1 \leq V_n \leq W_n \leq 7$*

5°) *Démontrer que pour tout $n \in N$, on a $|W_n - V_n| \leq \dfrac{3}{4}\,|W_{n-1} - V_{n-1}|$*

6°) *En déduire que pour tout $n \in N$, on a $0 \leq |W_n - V_n| \leq 6\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$*

7°) *En déduire la limite de $[W_n - V_n]$*

8°) *En déduire la limite de (V_n), (W_n) et (U_n).*

EXERCICE IV [4 points]

Dans plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A et Ω d'affixes respectives $a = -1 + \sqrt{3} + i$ et $\omega = -1 + 2i$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $2\pi/3$, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-1/2$.

1°) Placer sur la figure les points A et Ω, puis l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.

2°) On note b, c, et d les affixes des points B, C, D. Le tableau suivant contient une suite de 18 affirmations dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne, dans les colonnes 2, 3 ou 4. IndiquerVRAI ou FAUX en toutes lettres dans chacune des cases du tableau.

1	$\lvert a - \omega \rvert =$	2	4	$\sqrt{3} - i$
2	$\arg(a - \omega) =$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$
3	$\left(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg((\omega - c)i)$	$\left(-\vec{v},\overrightarrow{C\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b - 2i$
5	$\dfrac{b-d}{a-d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$
6	*Le point D est*	*L'image de Ω par la translation de vecteur* $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	*L'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport* $\dfrac{3}{2}$	*L'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle* $-\dfrac{\pi}{6}$