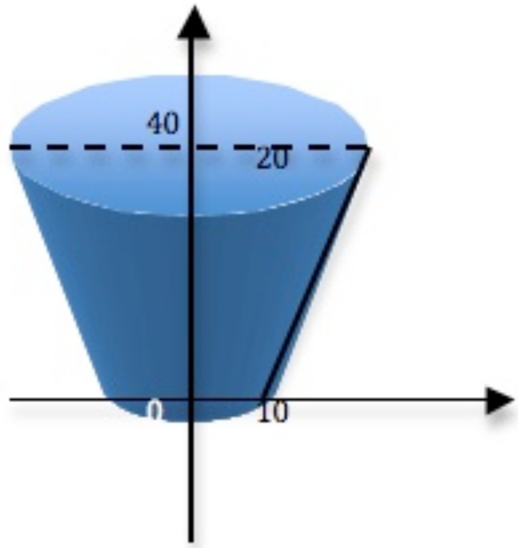
Intégrales - Volumes - Équations différentielles
[Calculatrices autorisées]

EXERCICE 1 [5 points]

Le seau du Petit Nicolas … qui n'est pas sot.



Le seau du Petit Nicolas est un seau comme les autres seaux : il a une hauteur de 40 cm, le rayon du fond est de 10 cm et le rayon du haut est de 20 cm.

Nicolas sait très bien que son seau est engendré par un segment de droite tournant autour de l'axe vertical 0z. Mais il voudrait bien savoir combien de litres d'eau il peut mettre dedans en le remplissant à ras bord.

Il vous demande de l'aider :

1. Donnez lui l'équation de la droite qui contient le segment qui engendre son seau. Pour cela il vous suggère d'exprimer z (axe vertical) en fonction de x (axe horizontal).
2. Il vous demande ensuite d'en déduire le rayon r d'une tranche horizontale du seau prise à la hauteur z.
3. Nicolas en déduit alors la surface d'une tranche - circulaire évidemment ! - prise à la hauteur z, puis le volume dv élémentaire, et même infinitésimal, d'une tranche d'épaisseur dz à partir de z. Dites ce que cela vous rappelle.
4. Le petit Nicolas se souvient que pour avoir le volume d'un solide de révolution il suffit de faire la somme intégrale des volumes élémentaires du bas en haut de l'axe du saut. Ecrivez la formule du Petit Nicolas.
5. Calculez ce volume total en cm^3 puis en litres.
6. Le petit Nicolas va à la plage avec son seau, et le remplit d'eau à ras bord. Pensez vous qu'il pourra le porter jusqu'à la maison pour remplir l'aquarium à poissons rouges de son amie Clémentine ?… Mais les poissons rouges de Clémentine n'aiment pas du tout l'eau de mer, et Clémentine est très fâchée contre Nicolas, qui a toujours de très mauvaises bonnes idées… heureusement que le seau était trop lourd.
7. D'ailleurs Clémentine se moque de lui avec ses calculs compliqués, car elle avec son bon sens in-nez, elle a flairé le piège et lui dit qu'il suffisait de faire une grosse soustraction pour avoir le résultat… car elle sait, elle, que le volume d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de la base par la hauteur …)
8. [BONUS] Montrez qu'elle a raison (les filles ont toujours raison dans ces cas là), et imaginez la fin de l'histoire …

EXERCICE 2 [4 POINTS]

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

   On suppose connu le résultat suivant :
   La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
   Soit a un réel donné.

   a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

   b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

   a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$
   soit une solution f_0 de (E).

   b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

   c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

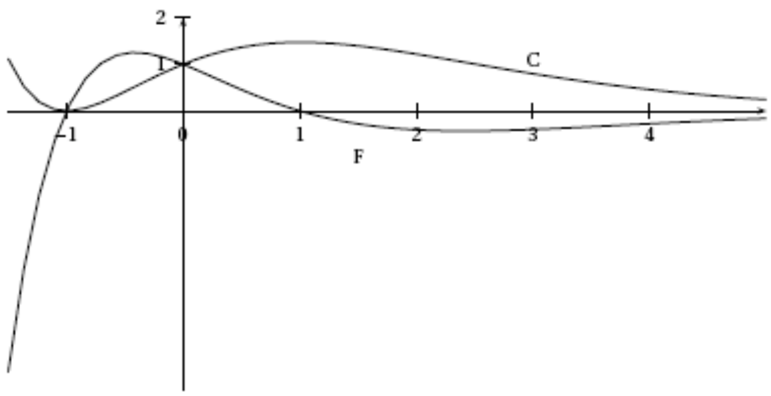
   d. En déduire les solutions de (E).

   e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 3 [6 points]

Partie A : Lectures graphiques

On donne dans un repère orthogonal les courbes C et F représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'.



1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0 ?

Partie B

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre :

$$\text{(E)} \quad y' + y = 2(x+1)\,e^{-x}$$

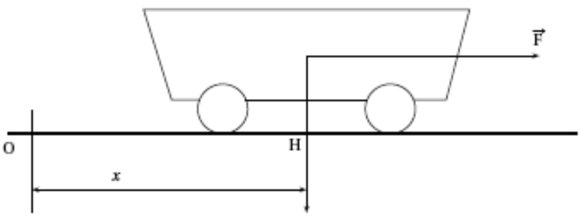
1. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x^2 + 2x)\,e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E') y' + y = 0
3. Montrer que u est solution de (E') si et seulement si $f = f_0 + u$ est solution de (E)
   En déduire la solution générale f de l'équation (E).
4. Sachant que la fonction g de la partie A est une solution particulière de (E), déterminer $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
5. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

EXERCICE 4 [5 points]

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles? la vitesse et de sens contraire; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.



1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.
3. Calculer $V = \lim_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale? 90% de sa valeur limite V?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.