Intégrales

[Calculatrices mautorisées]

EXERCICE I : [4 points]

1° *a)* Montrer que, pour tout réel x, on a

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

b) Calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2° *a)* Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}.$$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE II : [6 points]

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel n$\geqslant 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que :

$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$

T.S.V.P ➥

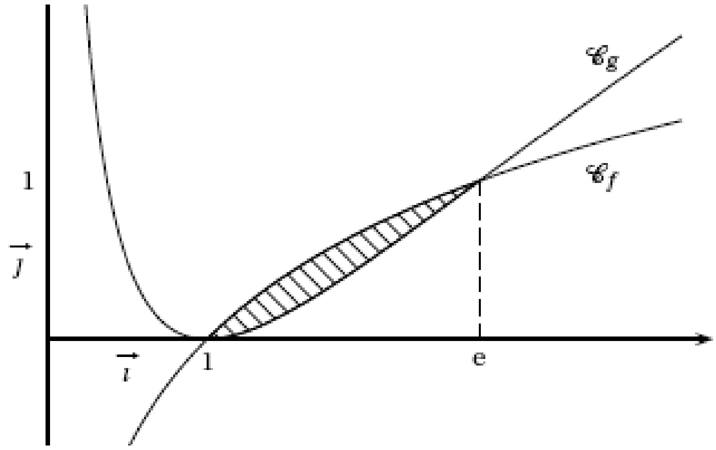
Intégrales

[Calculatrices mautorisées]

EXERCICE III : [5 points]

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.

c. En déduire J.

d. Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

EXERCICE IV : [5 points]

ln désigne la fonction logarithme népérien, e la base des logarithmes népériens.

1° Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}.$$

Étudier la fonction f (variations et limites aux bornes) et tracer sa courbe représentative C dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2° x étant un réel, soit : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

Interpréter géométriquement $F(x)$. Calculer $F'(x)$.

3° Soit g la fonction numérique définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[$ par :

$$g(x) = \ln\left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Calculer $(F \circ g)(O)$.

Calculer, pour x élément de $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[$, $(F \circ g)'(x)$ et en déduire que :

$$(F \circ g)(x) = x.$$