• Exponentielle • Logarithme • Suites Numériques •

[Calculatrices et papier millimètré nécessaires]

EXERCICE I : R.O.C. [4 points]

A - On suppose acquise la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > x$

1°) Faire la démonstration de $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2°) En déduire la démonstration de $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

B - On suppose acquises les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a *Exp(x) > 0 et Exp(0)=1*
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a *(Exp(x))' = Exp(x)*.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction Exponentielle est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, sur R*, et faire la figure.

EXERCICE II : [6 points]

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :
$$0,94 < \alpha < 0,941.$$
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (2x - 5)\left(1 - e^{-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, ou f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Dresser le tableau de variations de f.
4. a. Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$.
   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
6. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

T.S.V.P ➡

• Exponentielle • Logarithme • Suites Numériques •

[Calculatrices et papier millimètré nécessaires]

EXERCICE III : [5 points]

1. Soit u la suite définie par: $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n

   a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur N par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par:

   $$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   Exprimer $S_n$en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE IV : [5 points]

A. Soit φ l'application définie de R* dans R par $\varphi(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$

   1) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe.
   2) En déduire les variations de φ et le signe de $\varphi(x)$ sur R*.

B. Soif f l'application définie de R dans R par : $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ *pour tout* $x \neq 0$, *et* $f(0) = 0$

   1) Montrer que f est continue en 0.
   2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+e^{\frac{1}{x}}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} 1+e^{\frac{1}{x}}$
   3) Étudier la dérivabilité de f en 0 (à droite et à gauche).
   4) Démontrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$
   5) En déduire les variations de f dans R.

C. [Bonus difficile /1pt]

   Démontrer que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f.

   [Pour cela on pourra effectuer le changement de variable défini par $t = \dfrac{1}{x}$ *]*

D. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (Unité de longueur 6 cm)