Commun à tous les candidats

A - Quelques propriétés

1. $z \neq 0$ et $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow |z'| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff |z'| = \left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\overline{z}|} \iff |z'| \times |\overline{z}| = 1.$

   Pour les arguments : $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow \arg(z') = \arg\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = \arg(-1) - \arg(\overline{z}) = \pi - (-\arg z) = \pi + \arg z = \arg(z) + \pi.$

2. Ceci résulte de la question précédente ; de plus les points sont dans l'ordre M, O et M'.

3. Pour $z \neq 0$, on a $\dfrac{1}{z}(z-1) = 1 - \dfrac{1}{z} = 1 - \dfrac{\overline{1}}{\overline{z}} = 1 + \overline{z'} = \overline{1} + \overline{z'} = \overline{z'+1}.$

B - Construction de l'image d'un point

1. $|z-1| = 1 \iff AM = 1 \iff M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

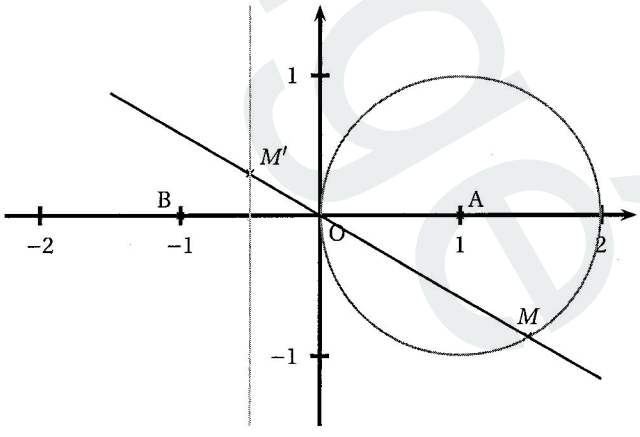
2. **a.** $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1) \Rightarrow \left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}(z-1)\right| \iff |z'+1| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \times |z-1| \iff |z'+1| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ (car $M \in \mathscr{C} \iff |z-1| = 1$) $\iff |z'+1| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff |z'+1| = |z'|.$

   Cette dernière égalité s'interprète géométriquement par : $BM' = OM'$ qui signifie que M' est équidistant de B et de O, autrement dit M' appartient à la médiatrice de [OB].

   b. $|z'+1| = |z'| \iff \left|-\dfrac{1}{\overline{z}} + 1\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff \left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\overline{z}|} \iff |\overline{z}-1| = 1 \iff |z-1| = 1.$

   La réciproque est donc vraie : on a bien $OM = 1$.

3. Figure



Construction de l'image d'un point de $\mathscr{C}$:

- M' est aligné avec O et M : il appartient à la droite (OM) ;
- $M'B = M'O$, donc M' appartient à la médiatrice de [OB] ;
- M' est donc le point commmun à la droite (OM) et à la médiatrice de [OB].