Nombres Complexes et Suites Numériques

[Calculatrices autorisées]

EXERCICE I [11 pts]

Préambule : [1pt] *On a* $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}=2+\dfrac{4}{x+1}$ $u_{n+1}=f(u_n)$ *et* $u_0=1$.

La fonction f est décroissante sur l'intervalle]-1 ; +∞[et tend vers 2 en +∞.

Les termes successifs de la suite sont les *<u>abscisses</u>* *des points d'intersection de la courbe avec les droites de rabattement par rapport à la première bissectrice. On voit donc que la suite* (u_n) *n'est pas monotone, mais qu'elle est bornée par* $u_0=1$ *et* $u_1=4$. *De plus elle semble converger vers le point d'abscisse 3.*

[A] - *Étude à l'aide de la suite auxiliaire* : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+2}$

1°) [1pt] La suite (v_n) est *géométrique* de raison $q=-\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=-\dfrac{2}{3}$ en effet on a : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\frac{2u_n+6}{u_n+1}-3}{\frac{2u_n+6}{u_n+1}+2}=\dfrac{-u_n+3}{4u_n+8}=\dfrac{-1}{4}\dfrac{u_n-3}{u_n+2}=\left(\dfrac{-1}{4}\right)v_n$ *et* $v_0=\dfrac{u_0-3}{u_0+2}=\dfrac{1-3}{1+2}=-\dfrac{2}{3}$

2°) [0,5pt] Donc $v_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$ *et lim*(v_n) = 0 car | q | < 1.

3°) [0,5pt] Donc $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+2}\Leftrightarrow(u_n+2)v_n=u_n-3\Leftrightarrow u_n=\dfrac{2v_n+3}{1-v_n}$ et comme *lim*(v_n) = 0 on et tire *lim*(u_n) = 3

[B] - *Majoration par une suite géométrique convergente* :

1°) [1pt] *Soit* (P_n) *la proposition :* $1\le u_n\le 4$ *à démontrer par récurrence :*

(i) *<u>Initialisation</u>* : $(P_0)\Leftrightarrow 1\le u_0\le 4$ *est vrai puisque par hypothèse* $u_0=1$.

(ii) *<u>Hérédité</u>* : *soit n un entier naturel fixé, on a* $(P_n)\Leftrightarrow 1\le u_n\le 4$ *et f* *<u>décroissante</u>* *sur [1 ;4]* $\Rightarrow f(1)\ge f(u_n)\ge f(4)$ $\Rightarrow 4\ge u_{n+1}\ge 14/5\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 7\Leftrightarrow(P_{n+1})$

(iii) *<u>Conclusion</u>* : *par récurrence on peut donc affirmer que la proposition* (P_n) *est vraie pour tout entier* $n\in\mathbb{N}$.

2°) [1pt] *On a :* $|u_{n+1}-3|=\left|\dfrac{2u_n+6}{u_n+1}-3\right|=\left|\dfrac{-u_n+3}{u_n+1}\right|=\dfrac{1}{|u_n+1|}|u_n-3|\le\dfrac{1}{2}|u_n-3|$ *car d'après le 1°) on a* $1\le u_n\le 4$ *donc*

$2\le u_n+1\le 5$ *d'où* $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{u_n+1}\le\dfrac{1}{2}$

3°) [1pt] 1°) [1pt] *Soit* (P_n) *la proposition :* $|u_n-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *à démontrer par récurrence :*

(i) *<u>Initialisation</u>* : $(P_0)\Leftrightarrow |u_0-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ *est vrai puisque par hypothèse* $u_0=1$ *et* $2\le 3$.

(ii) *<u>Hérédité</u>* : *soit n un entier naturel fixé, on a* $(P_n)\Leftrightarrow |u_n-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et* $|u_{n+1}-3|\le\dfrac{1}{2}|u_n-3|$ *donc*

$$|u_{n+1}-3|\le\frac{1}{2}|u_n-3|\le\left(\frac{1}{2}\right)3\left(\frac{1}{2}\right)^n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow(P_{n+1}).\ \underline{CQFD}$$

(iii) *<u>Conclusion</u>* : *par récurrence on peut donc affirmer que la proposition* (P_n) *est vraie pour tout entier* $n\in\mathbb{N}$.

NB : On peut aussi rédiger cette démonstration plus brièvement en écrivant , pour tout $n\ge 0$:

$$|u_n-3|\le\frac{1}{2}|u_{n-1}-3|\le\left(\frac{1}{2}\right)^2|u_{n-2}-3|\le\left(\frac{1}{2}\right)^3|u_{n-3}-3|\le\ldots\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-3|\le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dans ce cas il faut comprendre que les points de suspension (…) représentent ce que l'on appelle parfois une « récurrence immédiate »

4°) [0,5pt] *Par passage à la limite dans la double inégalité* $0\le|u_n-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{3}{2^n}$ *on obtient en vertu du théorème d'encadrement des limites dit « théorème des gendarmes :* $0\le \lim|u_n-3|\le 0$ *donc* $\lim|u_n-3|=0$*, c'est à dire* $\lim u_n=3$.

En effet la suite définie par $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *est une suite géométrique convergente vers 0 qui majore la différence* $|u_n-3|$.

5°) [0,5pt] Pour que les termes de la suite u_n *diffèrent de sa limite de moins de* 10^{-3}*, il* *<u>suffit</u>* *(mais ce n'est pas nécessaire) que l'on ait* $\dfrac{3}{2^n}\le\dfrac{1}{1000}\Leftrightarrow 2^n\ge 3000\Leftrightarrow n\ge 12$ (car 2^{11}= 2048 et 2^{12} = 4096).

Nombres Complexes et Suites Numériques

[Calculatrices autorisées]

[C] - *Utilisation des suites adjacentes* : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ donc

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f[f(u_{2n})] = f[f(a_n)]$$
$$b_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f[f(u_{2n+1})] = f[f(b_n)]$$

1°) [1pt] *soit* $g(x) = f[f(x)] = f\left(\frac{2x+6}{x+1}\right) = \frac{\frac{2x+6}{x+1}+6}{\frac{2x+6}{x+1}+1} = \frac{10x+18}{3x+7}$, *et comme f est décroissante sur l'intervalle [1 ;4]et que* $f([1;4]) \subset [1;4]$ *la composée* $g = f \circ f$ *est croissante sur l'intervalle [1 ;4].*

2°) [0,5pt] *Soit* (P_n) *la proposition :* $a_n \le a_{n+1}$ *à démontrer par récurrence :*

(i) *<u>Initialisation</u> :* $(P_0) \Leftrightarrow a_0 \le a_1$ *est vrai puisque par hypothèse* $a_0 = u_0 = 1$ *et* $a_1 = g(a_0) = g(1) = 2{,}8$

(ii) *<u>Hérédité</u> : soit n un entier naturel fixé, on a* $(P_n) \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1}$ *et g <u>croissante</u> sur [1 ;4]* $\Rightarrow g(a_n) \le g(a_{n+1})$ $\Rightarrow a_{n+1} \le a_{n+2} \Leftrightarrow (P_{n+1})$.

(iii) *<u>Conclusion</u> : par récurrence on peut affirmer que* (P_n) *est vraie pour tout* $n \ge 0$, *i.e.* (a_n) *croissante.*

3°) [0,5pt] *Soit* (P_n) *la proposition :* $a_n \le 3 \le b_n$ *à démontrer par récurrence :*

(i) *<u>Initialisation</u> :* $(P_0) \Leftrightarrow a_0 \le 3 \le b_0$ *est vrai puisque par hypothèse* $a_0 = u_0 = 1$ *et* $b_0 = u_1 = f(1) = 4$.

(ii) *<u>Hérédité</u> : soit n un entier naturel fixé, on a* $(P_n) \Leftrightarrow a_n \le 3 \le b_n$ *et g <u>croissante</u> sur [1 ;4]* $\Rightarrow g(a_n) \le g(3) \le g(b_n)$ $\Rightarrow a_{n+1} \le 3 \le b_{n+1} \Leftrightarrow (P_{n+1})$ *car* $g(3) = f(f(3)) = f(3) = 3$.

(iii) *<u>Conclusion</u> : par récurrence on peut affirmer que* (P_n) *est vraie pour tout* $n \ge 0$.

4°) [1pt] on a $|b_{n+1} - a_{n+1}| = |g(b_n) - g(a_n)| = \left|\frac{10b_n+18}{3b_n+7} - \frac{10a_n+18}{3a_n+7}\right| = \left|\frac{16(b_n-a_n)}{(3b_n+7)(3a_n+7)}\right| = \frac{16}{(3b_n+7)(3a_n+7)}|b_n - a_n| \le \frac{1}{10}|b_n - a_n| \le \frac{1}{3}|b_n - a_n|$

en effet : $1 \le a_n \le 3 \Rightarrow 10 \le 3a_n + 7 \le 16$ *et* $3 \le b_n \le 4 \Rightarrow 16 \le 3b_n + 7 \le 19$ *d'où* $16 \times 10 \le (3a_n+7)(3b_n+7) \le 19 \times 16$

d'où $\frac{16}{(3a_n+7)(3b_n+7)} \le \frac{16}{160} = \frac{1}{10} \le \frac{1}{3}$ *CQFD.*

5°) [0,5pt] *[Méthode des Dominos »] : on effectue le produit membre à membre des n inégalités du type* $|b_n - a_n| \le \frac{1}{3}|b_{n-1} - a_{n-1}|$ *et on réduit les termes semblables :*

$$0 \le |b_n - a_n| \le \frac{1}{3}|b_{n-1} - a_{n-1}|$$
$$0 \le |b_{n-1} - a_{n-1}| \le \frac{1}{3}|b_{n-2} - a_{n-2}|$$
$$0 \le |b_{n-2} - a_{n-2}| \le \frac{1}{3}|b_{n-3} - a_{n-3}|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \le |b_n - a_n| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n |b_0 - a_0| = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6°) [0,5pt] *Donc d'après le « Théorème des gendarmes »* $\lim |b_n - a_n| = 0$. *Ainsi peut-on dire que les suites* (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes, elles sont donc convergentes et ont une limite commune* α.

7°) [0,5pt] Or pour tout n on a $a_n \le u_n \le b_n$ *puisque* u_n *coïncide alternativement avec* a_n *et* b_n, *donc d'après le « Théorème des gendarmes »* $\alpha \le \lim u_n \le \alpha$ *d'où* $\lim u_n = \alpha$, *et donc* $1 \le \alpha \le 4$ *et la fonction f est continue sur [1 ;4]. Donc* $\lim f(u_n) = f(\alpha)$ *et par hypothèse* $u_{n+1} = f(u_n)$ *d'où* $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$ *i.e.* $\alpha = f(\alpha)$. α *est donc un point fixe de la fonction f sur [1 ;4].*

Or les points fixes de f sont les solutions de l'équation f(x) = x , c'est à dire

$\frac{2x+6}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $x = -2$ *mais comme cette dernière solution n'est pas dans l'intervalle [1 ;4] la limite de* (u_n) *est bien 3.*

Voir corrigé des Exercices II et III pages suivantes.