Nombres Complexes et Suites Numériques

[Calculatrices autorisées]

EXERCICE I [11 pts]

Préambule : [1pt] *On a* $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}=2+\dfrac{4}{x+1}$ $u_{n+1}=f(u_n)$ *et* $u_0=1$.

La fonction f est décroissante sur l'intervalle]-1 ; +∞[et tend vers 2 en +∞.

Les termes successifs de la suite sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec les droites de rabattement par rapport à la première bissectrice. On voit donc que la suite (u_n) *n'est pas monotone, mais qu'elle est bornée par* $u_0=1$ *et* $u_1=4$. *De plus elle semble converger vers le point d'abscisse 3.*

[A] - *Étude à l'aide de la suite auxiliaire* : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+2}$

1°) [1pt] La suite (v_n) est *géométrique* de raison $q=-\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=-\dfrac{2}{3}$ en effet on

a : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\frac{2u_n+6}{u_n+1}-3}{\frac{2u_n+6}{u_n+1}+2}=\dfrac{-u_n+3}{4u_n+8}=\dfrac{-1}{4}\dfrac{u_n-3}{u_n+2}=\left(\dfrac{-1}{4}\right)v_n$ *et* $v_0=\dfrac{u_0-3}{u_0+2}=\dfrac{1-3}{1+2}=-\dfrac{2}{3}$

2°) [0,5pt] Donc $v_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$ *et* $lim(v_n)=0$ car $|q|<1$.

3°) [0,5pt] Donc $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+2}\Leftrightarrow(u_n+2)v_n=u_n-3\Leftrightarrow u_n=\dfrac{2v_n+3}{1-v_n}$ et comme $lim(v_n)=0$ on et tire $lim(u_n)=3$

[B] - *Majoration par une suite géométrique convergente* :

1°) [1pt] *Soit* (P_n) *la proposition* : $1\le u_n\le 4$ *à démontrer par récurrence :*

(i) Initialisation : (P₀) ⇔ $1\le u_0\le 4$ est vrai puisque par hypothèse $u_0=1$.

(ii) Hérédité : soit n un entier naturel fixé, on a $(P_n)\Leftrightarrow 1\le u_n\le 4$ *et f décroissante sur [1 ;4] ⇒ $f(1)\ge f(u_n)\ge f(4)$*

⇒ $4\ge u_{n+1}\ge 14/5\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 7\Leftrightarrow(P_{n+1})$

(iii) Conclusion : par récurrence on peut donc affirmer que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

2°) [1pt] *On a :* $|u_{n+1}-3|=\left|\dfrac{2u_n+6}{u_n+1}-3\right|=\left|\dfrac{-u_n+3}{u_n+1}\right|=\dfrac{1}{|u_n+1|}|u_n-3|\le\dfrac{1}{2}|u_n-3|$ *car d'après le 1°) on a* $1\le u_n\le 4$ *donc*

$2\le u_n+1\le 5$ *d'où* $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{u_n+1}\le\dfrac{1}{2}$

3°) [1pt] 1°) [1pt] *Soit* (P_n) *la proposition* : $|u_n-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *à démontrer par récurrence :*

(i) Initialisation : (P₀) ⇔ $|u_0-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ *est vrai puisque par hypothèse $u_0=1$ et $2\le 3$.*

(ii) Hérédité : soit n un entier naturel fixé, on a $(P_n)\Leftrightarrow|u_n-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et* $|u_{n+1}-3|\le\dfrac{1}{2}|u_n-3|$ *donc*

$$|u_{n+1}-3|\le\frac{1}{2}|u_n-3|\le\left(\frac{1}{2}\right)3\left(\frac{1}{2}\right)^n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow(P_{n+1}).\ \underline{CQFD}$$

(iii) Conclusion : par récurrence on peut donc affirmer que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

NB : On peut aussi rédiger cette démonstration plus brièvement en écrivant , pour tout $n\ge 0$:

$$|u_n-3|\le\frac{1}{2}|u_{n-1}-3|\le\left(\frac{1}{2}\right)^2|u_{n-2}-3|\le\left(\frac{1}{2}\right)^3|u_{n-3}-3|\le\ldots\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-3|\le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dans ce cas il faut comprendre que les points de suspension (…) représentent ce que l'on appelle parfois une « récurrence immédiate »

4°) [0,5pt] *Par passage à la limite dans la double inégalité* $0\le|u_n-3|\le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{3}{2^n}$ *on obtient en vertu du théorème d'encadrement des limites dit « théorème des gendarmes : $0\le lim\,|u_n-3|\le 0$ donc $lim\,|u_n-3|=0$, c'est à dire $lim\,u_n=3$.*

En effet la suite définie par $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *est une suite géométrique convergente vers 0 qui majore la différence $|u_n-3|$.*

5°) [0,5pt] Pour que les termes de la suite u_n *diffèrent de sa limite de moins de 10^{-3}, il suffit (mais ce n'est pas nécessaire) que l'on ait* $\dfrac{3}{2^n}\le\dfrac{1}{1000}\Leftrightarrow 2^n\ge 3000\Leftrightarrow n\ge 12$ (car $2^{11}=2048$ et $2^{12}=4096$).

Corrigé

Nombres Complexes et Suites Numériques

[Calculatrices autorisées]

[C] - *Utilisation des suites adjacentes* : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ donc

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f[f(u_{2n})] = f[f(a_n)]$$
$$b_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f[f(u_{2n+1})] = f[f(b_n)]$$

1°) [1pt] *soit* $g(x) = f[f(x)] = f\left(\frac{2x+6}{x+1}\right) = \frac{\frac{2x+6}{x+1}+6}{\frac{2x+6}{x+1}+1} = \frac{10x+18}{3x+7}$, *et comme f est décroissante sur l'intervalle [1 ;4]et que* $f([1;4]) \subset [1;4]$ *la composée* $g = f \circ f$ *est croissante sur l'intervalle [1 ;4].*

2°) [0,5pt] *Soit* (P_n) *la proposition* : $a_n \le a_{n+1}$ *à démontrer par récurrence :*

(i) <u>*Initialisation*</u> : $(P_0) \Leftrightarrow a_0 \le a_1$ *est vrai puisque par hypothèse* $a_0 = u_0 = 1$ *et* $a_1 = g(a_0) = g(1) = 2{,}8$

(ii) <u>*Hérédité*</u> : *soit n un entier naturel fixé, on a* $(P_n) \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1}$ *et g* <u>*croissante*</u> *sur* $[1;4] \Rightarrow g(a_n) \le g(a_{n+1})$ $\Rightarrow a_{n+1} \le a_{n+2} \Leftrightarrow (P_{n+1})$.

(iii) <u>*Conclusion*</u> : *par récurrence on peut affirmer que* (P_n) *est vraie pour tout* $n \ge 0$, *i.e.* (a_n) *croissante.*

3°) [0,5pt] *Soit* (P_n) *la proposition* : $a_n \le 3 \le b_n$ *à démontrer par récurrence :*

(i) <u>*Initialisation*</u> : $(P_0) \Leftrightarrow a_0 \le 3 \le b_0$ *est vrai puisque par hypothèse* $a_0 = u_0 = 1$ *et* $b_0 = u_1 = f(1) = 4$.

(ii) <u>*Hérédité*</u> : *soit n un entier naturel fixé, on a* $(P_n) \Leftrightarrow a_n \le 3 \le b_n$ *et g* <u>*croissante*</u> *sur* $[1;4] \Rightarrow g(a_n) \le g(3) \le g(b_n)$ $\Rightarrow a_{n+1} \le 3 \le b_{n+1} \Leftrightarrow (P_{n+1})$ *car* $g(3) = f(f(3)) = f(3) = 3$.

(iii) <u>*Conclusion*</u> : *par récurrence on peut affirmer que* (P_n) *est vraie pour tout* $n \ge 0$.

4°) [1pt] on a $|b_{n+1} - a_{n+1}| = |g(b_n) - g(a_n)| = \left|\frac{10b_n+18}{3b_n+7} - \frac{10a_n+18}{3a_n+7}\right| = \left|\frac{16(b_n-a_n)}{(3b_n+7)(3a_n+7)}\right| = \frac{16}{(3b_n+7)(3a_n+7)}|b_n - a_n| \le \frac{1}{10}|b_n - a_n| \le \frac{1}{3}|b_n - a_n|$

en effet : $1 \le a_n \le 3 \Rightarrow 10 \le 3a_n + 7 \le 16$ *et* $3 \le b_n \le 4 \Rightarrow 16 \le 3b_n + 7 \le 19$ *d'où* $16 \times 10 \le (3a_n+7)(3b_n+7) \le 19 \times 16$

d'où $\frac{16}{(3a_n+7)(3b_n+7)} \le \frac{16}{160} = \frac{1}{10} \le \frac{1}{3}$ *CQFD.*

5°) [0,5pt] *[Méthode des Dominos »] : on effectue le produit membre à membre des n inégalités du type* $|b_n - a_n| \le \frac{1}{3}|b_{n-1} - a_{n-1}|$ *et on réduit les termes semblables :*

$$0 \le |b_n - a_n| \le \frac{1}{3}|b_{n-1} - a_{n-1}|$$
$$0 \le |b_{n-1} - a_{n-1}| \le \frac{1}{3}|b_{n-2} - a_{n-2}|$$
$$0 \le |b_{n-2} - a_{n-2}| \le \frac{1}{3}|b_{n-3} - a_{n-3}|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \le |b_n - a_n| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n |b_0 - a_0| = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6°) [0,5pt] *Donc d'après le « Théorème des gendarmes »* $\lim |b_n - a_n| = 0$. *Ainsi peut-on dire que les suites* (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes, elles sont donc convergentes et ont une limite commune* α.

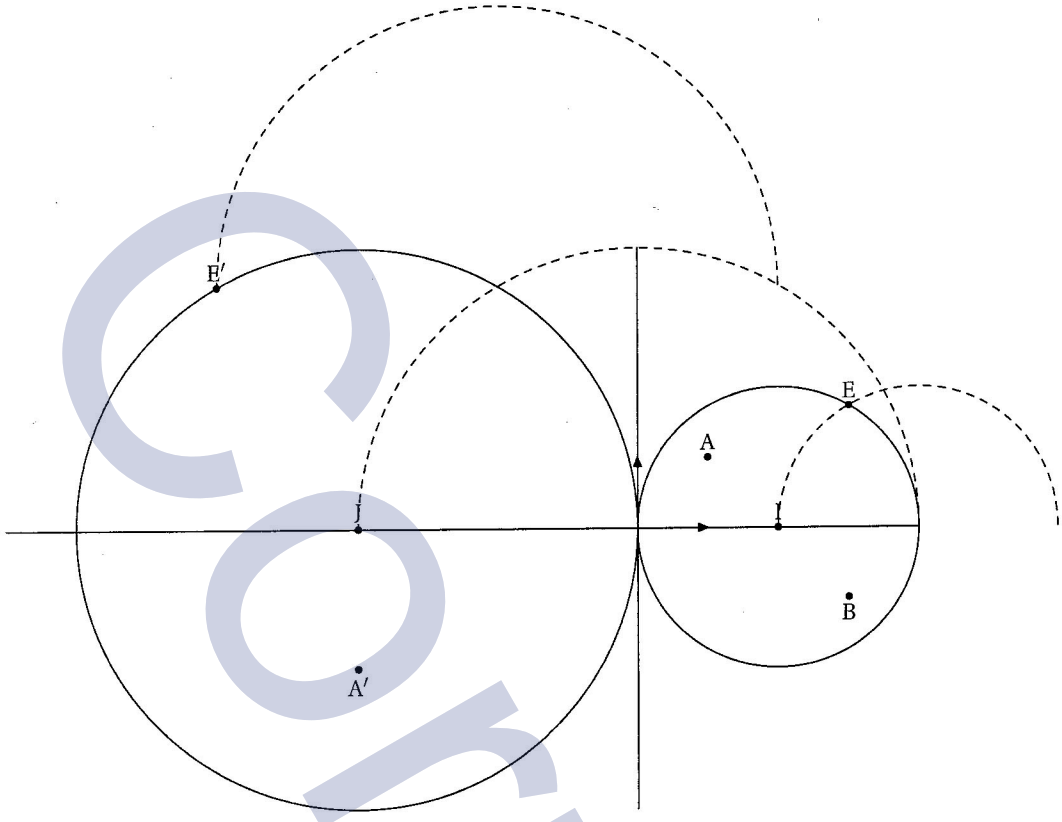
7°) [0,5pt] Or pour tout n on a $a_n \le u_n \le b_n$ *puisque* u_n *coïncide alternativement avec* a_n *et* b_n, *donc d'après le « Théorème des gendarmes »* $\alpha \le \lim u_n \le \alpha$ *d'où* $\lim u_n = \alpha$, *et donc* $1 \le \alpha \le 4$ *et la fonction f est continue sur [1 ;4]. Donc* $\lim f(u_n) = f(\alpha)$ *et par hypothèse* $u_{n+1} = f(u_n)$ *d'où* $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$ *i.e.* $\alpha = f(\alpha)$. α *est donc un point fixe de la fonction f sur [1 ;4].*
Or les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$, *c'est à dire*
$\frac{2x+6}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $x = -2$ *mais comme cette dernière solution n'est pas dans l'intervalle [1 ;4] la limite de* (u_n) *est bien 3.*

Voir corrigé des Exercices II et III pages suivantes.

Corrigé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+i$, $3-i$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M′ est appelé l'image de M.

1. Figure :



2. Affixes des pointsA′ et B′, images respectives des points A et B :

$$a' = (1+i)^2 - 4(1+i) = -4-2i \quad ; \quad b' = (3-i)^2 - 4(3-i) = -4-2i$$

On remarque que A′ = B′.

3. Points qui ont pour image le point d'affixe -5 :
Dire que M a pour image le point d'affixe -5 signifie que : $z^2 - 4z = -5 \iff z^2 - 4z + 5 = 0$.
C'est une équation du second degré. $\Delta = 16 - 20 = (2i)^2$.
D'où les solutions sont $z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i$ et $z_2 = \dfrac{4-2i}{2} = 2-i$.

4. (a) Pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.
   (b) Ainsi :
   $|z'+4| = |z-2|^2$ et, lorsque z est différent de 2, $\arg(z'+4) = 2\arg(z-2)$.
   (c) Dire que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 signifie que $|z-2| = 2$.
   Donc $|z'+4| = |z-2|^2 = 4$, ce qui signifie que M′ appartient au cercle de centre le point I′ d'affixe -4 et de rayon 4.

5. E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 3 + i\sqrt{3}$
Affixe de E′ : $e' = \left(3+i\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(3+i\sqrt{3}\right) = -6 + 2i\sqrt{3}$
   (a) Distance IE : $\text{IE} = |e-2| = \left|2+2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right| = \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2$;
   Mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{IE}}\right)$: $\arg(e-2) = \arg\left(2+2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right) = \arg\left(2\times\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
   (b) Distance JE′ : $\text{JE}' = \left|-6+2i\sqrt{3}+4\right| = \left|-2+2i\sqrt{3}\right| = 4\times\left|-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 4$;
   Mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right)$: $\arg\left(4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
   ou plus simplement :
   $$\text{JE}' = \left|e'+4\right| = |e-2|^2 = 2^2 = 4 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right) = \arg(e'+4) = 2\times\arg(e-2) = 2\times\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
   (c) Construction : le point E est sur le cercle de centre I et de rayon 2 ; son image E′ est donc sur le cercle de centre J et de rayon 4.

Corrigé

Commun à tous les candidats

A - Quelques propriétés

1. $z \neq 0$ et $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow |z'| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff |z'| = \left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\overline{z}|} \iff |z'| \times |\overline{z}| = 1.$

   Pour les arguments : $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow \arg(z') = \arg\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = \arg(-1) - \arg(\overline{z}) = \pi - (-\arg z) = \pi + \arg z = \arg(z) + \pi.$

2. Ceci résulte de la question précédente ; de plus les points sont dans l'ordre M, O et M'.

3. Pour $z \neq 0$, on a $\dfrac{1}{z}(z-1) = 1 - \dfrac{1}{z} = 1 - \dfrac{\overline{1}}{\overline{z}} = 1 + \overline{z'} = \overline{1} + \overline{z'} = \overline{z'+1}.$

B - Construction de l'image d'un point

1. $|z-1| = 1 \iff AM = 1 \iff M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

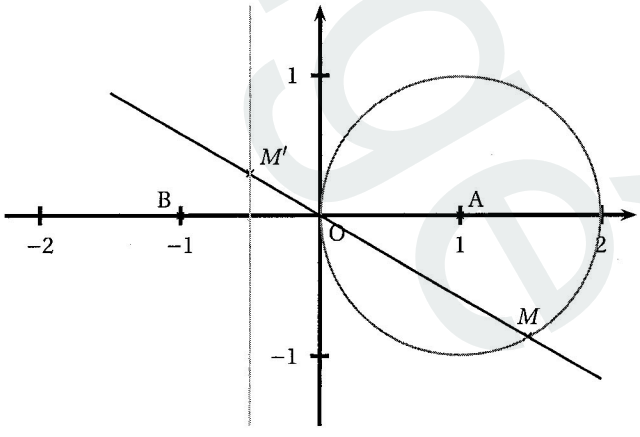
2. **a.** $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1) \Rightarrow \left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}(z-1)\right| \iff |z'+1| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \times |z-1| \iff |z'+1| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ (car $M \in \mathscr{C} \iff |z-1| = 1$) $\iff |z'+1| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff |z'+1| = |z'|.$

   Cette dernière égalité s'interprète géométriquement par : $BM' = OM'$ qui signifie que M' est équidistant de B et de O, autrement dit M' appartient à la médiatrice de [OB].

   b. $|z'+1| = |z'| \iff \left|-\dfrac{1}{\overline{z}} + 1\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff \left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\overline{z}|} \iff |\overline{z}-1| = 1 \iff |z-1| = 1.$

   La réciproque est donc vraie : on a bien $OM = 1$.

3. Figure



Construction de l'image d'un point de $\mathscr{C}$:

- M' est aligné avec O et M : il appartient à la droite (OM) ;
- $M'B = M'O$, donc M' appartient à la médiatrice de [OB] ;
- M' est donc le point commmun à la droite (OM) et à la médiatrice de [OB].