Dans les démonstrations demandées on pourra supposer acquis les résultats des questions qui précèdent, à condition d'indiquer clairement ce que l'on admet.

I – *On se propose d'étudier par trois méthodes différentes le comportement de la suite* (u_n) *définie par récurrence par :* $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* $f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}$ *et* $u_0 = 1$.

<u>Préambule</u> [1 pt]: *construire la représentation graphique de f sur l'intervalle [0 ; 5] dans un repère orthonormal avec pour unité 2 carreaux, et les 5 premiers termes de la suite* (u_n)*, puis indiquer quelles conjectures on peut faire sur le comportement de la suite* (u_n) *: sens de variation ? bornes ? limite ?*

A – [2 pts] <u>Etude à l'aide de la suite auxiliaire</u> $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$

1°) Montrer que la suite (v_n) *est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le 1er terme.*

2°) Exprimer v_n *en fonction de n et déterminer sa limite.*

3°) Exprimer u_n *en fonction de* v_n *et en déduire la limite de* (u_n).

B- [4 pts] <u>Majoration par une suite géométrique convergente.</u>

1°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $1 \leq u_n \leq 4$.

2°) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 3|$.

3°) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $|u_n - 3| \leq 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4°) En déduire la limite de (u_n).

5°) Déterminer à l'aide de votre calculatrice à partir de quel rang n_0*, tous les termes de la suite* (u_n)*.diffèrent de sa limite de moins de* 10^{-3}.

C- [4 pts] <u>Utilisation des suites adjacentes</u>

On pose $a_n = u_{2n}$ *(suite des termes de rang pair) et* $b_n = u_{2n+1}$ *(suite des termes de rang Impair).*

1°) Déterminer la fonction g telle que l'on ait $a_{n+1} = g(a_n)$ *et* $b_{n+1} = g(b_n)$ *et indiquer le sens de variation de g sur [0 ; 5].*

2°) Démontrer par récurrence que la suite(a_n) *est croissante. On admettra que la suite* (b_n) *est décroissante.*

3°) Démontrer par récurrence que tout $n \geq 0$, *on a* : $a_n \leq 3 \leq b_n$.

4°) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{3}|b_n - a_n|$.

5°) En déduire que pour tout $n \geq 0$, *on a* $|b_n - a_n| \leq 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

6°) En déduire que les suites (a_n) *et* (b_n) *sont convergentes et ont une même limite* α.

7°) En déduire que lim $(u_n) = \alpha$*, puis déterminer* α*, en justifiant les démonstrations.*

Exercice II –[5 points] *Le plan est muni d'un repère orthonormal direct* $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$*(unité: 1 carreau). Soient A, B et I les points d'affixes respectives 1 + i, 3−i et 2.*
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que z' = $z^2 - 4z$.
Le point M' est appelé l'image de M.

1. *Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.*
2. *Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B.*
Que remarque-t-on?
3. *Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe −5.*
4. a. *Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a :* $z' + 4 = (z - 2)^2$.
b. *En déduire une relation entre | z' + 4 | et | z −2 | et, lorsque z est différent de 2, une relation entre arg(z' +4) et arg (z −2).*
c. *Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle* $\mathcal{C}$ *de centre I et de rayon 2 ?*
5. *Soient E le point d'affixe* $2+2e^{i\frac{\pi}{3}}$, *J le point d'affixe −4 et E' l'image de E.*
a. *Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle* $\left(\vec{u};\overrightarrow{IE}\right)$.
b. *Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle* $\left(\vec{u};\overrightarrow{JE'}\right)$.
c. *Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.*

Exercice III –[4 points] *Le plan est muni d'un repère orthonormal direct* $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$*(unité: 4 carreaux). M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' tel que :*
$$z' = -\frac{1}{\bar{z}}$$
, où $\bar{z}$ *désigne le conjugué du nombre complexe z.*

Partie A - Quelques propriétés.
1. *Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.*
2. *Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.*
3. *Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité :*
$$\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$$

Partie B - Construction de l'image d'un point.
On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et −1.
On note $\mathcal{C}$ *l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :* $|z - 1| = 1$.
1. *Quelle est la nature de l'ensemble* $\mathcal{C}$ *?*
2. *Soit M un point de* $\mathcal{C}$ *d'affixe z, distinct du point O.*
a. *Démontrer que* $|z'+1| = |z'|$. *Interpréter géométriquement cette égalité.*
b. *Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité* $|z'+1| = |z'|$ *alors z vérifie l'égalité :*
$|z - 1| = 1$ *?*
3. *[Bonus 1Pt]* *Tracer l'ensemble* $\mathcal{C}$ *sur une figure. Si M est un point de* $\mathcal{C}$, *décrire et réaliser la construction du point M'.*