Nombres Complexes

EXERCICE I : $\boxed{Z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$$\Rightarrow Z^2 = (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + i^2(2-\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} \text{ (B)}$$

$$\Rightarrow Z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{(B)}$$

$$Z = re^{i\alpha} \Rightarrow Z^2 = r^2e^{2i\alpha} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} r^2 = 4 \\ 2\alpha \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} r = 2 \\ \alpha \equiv -\frac{\pi}{8}[\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} Z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} \\ ou \\ Z = 2e^{7i\frac{\pi}{8}} \end{array}\right\} Ré(Z) < 0 \Rightarrow Z = 2e^{7i\frac{\pi}{8}} \text{ (A)}$$

$$\cos\frac{7\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \ \& \ \sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \sin\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right) = \cos(-\frac{3\pi}{8}) = \cos\frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = -\cos\frac{7\pi}{8} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right) = -\sin(-\frac{3\pi}{8}) = \sin\frac{3\pi}{8} \quad \text{(C)}$$

EXERCICE II : $\boxed{z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0}$

1°) $\Delta = -64 = (8i)^2 \Rightarrow z = \dfrac{8\sqrt{3}-8i}{2}$ ou $z = \dfrac{8\sqrt{3}+8i}{2} \Rightarrow z = 4\sqrt{3} - 4i = a$ ou $z = 4\sqrt{3} + 4i = b$

2°) a) $a = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = 8\left(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $b = \bar{a} = 8^{i\frac{\pi}{6}}$

2°) b) $OA = |a| = 8$; $OB = |b| = 8$; $AB = |b-a| = |8i| = 8$ *donc OAB équilatéral.*

3°)

$$z_C = c = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$d = z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

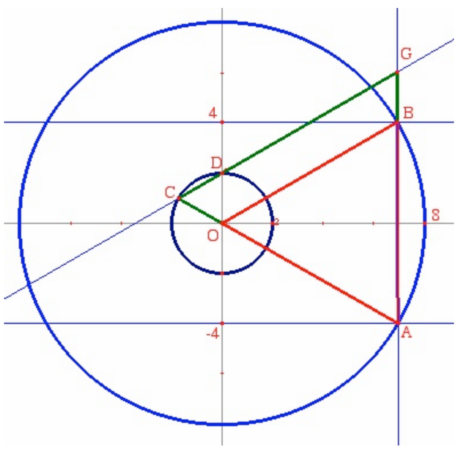
4°) a) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{O} \Leftrightarrow g - b - d = 0 \Leftrightarrow g = b + d = 4\sqrt{3} + 4i + 2i = 4\sqrt{3} + 6i$ *cqfd.*

c) $g - c = 4\sqrt{3} + 6i - (-\sqrt{3} + i) = 5\sqrt{3} + 5i = 5(\sqrt{3} + i) = 5(d - c) \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = 5\overrightarrow{CD}$ *cqfd*

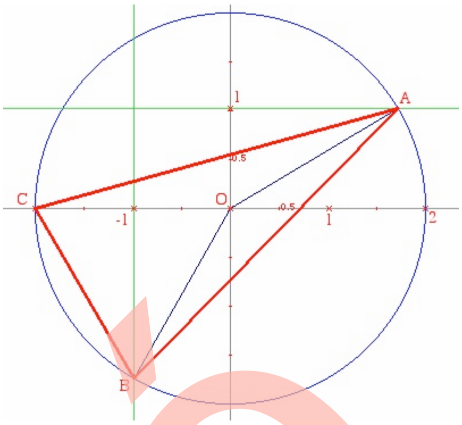
d) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow (OBGD)$parallélogramme

e) AGC triangle équilatéral car :

$$\frac{g-c}{g-a} = \frac{4\sqrt{3}+6i+\sqrt{3}-i}{4\sqrt{3}+6i-4\sqrt{3}+4i} = \frac{5(\sqrt{3}+i)}{10i} = \frac{-i(\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$



Nombres Complexes



EXERCICE III : 1°) $z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_C = -2$

$$z_B = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right) = 2e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

Le triangle ABC est isocèle en A car les triangles OAC et OAB sont isocèles en 0 et isométriques : les côtés OA,OB,OC sont égaux par construction, et les angles au centre sont égaux :

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) = (\vec{u};\overrightarrow{OC}) - (\vec{u};\overrightarrow{OA}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad [\text{mod}\ 2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad [\text{mod}\ 2\pi]$$

Les 3e côtés homologues AB et AC ont donc même mesure. CQFD.

2°) a)
$$Z = \frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-2i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = e^{5i\frac{\pi}{6}}$$

b) $f : M(z) \mapsto M'(z')$, $z' = e^{5i\frac{\pi}{6}}z$ définit une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

3°)
$$f : A(z_A) \mapsto A'(z'_A),\quad z'_A = e^{5i\frac{\pi}{6}}z_A = e^{5i\frac{\pi}{6}}2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi} = -2 = z_C \quad \text{donc } A' = f(A) = C.$$

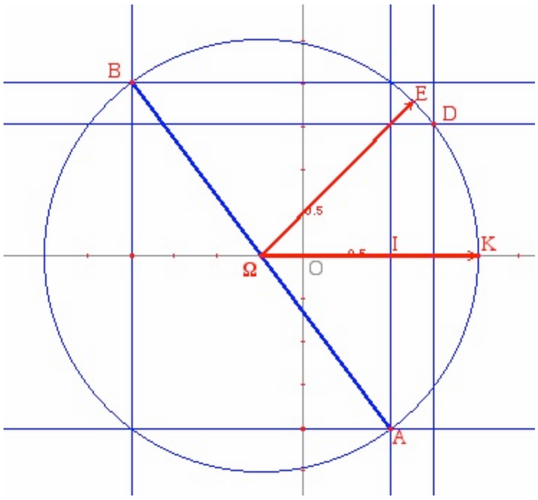
$$f : B(z_B) \mapsto B'(z'_B),\quad z'_B = e^{5i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{5i\frac{\pi}{6}}2e^{-2i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_A \quad \text{donc } B' = f(B) = A.$$

N.B. on aurait pu prévoir ce dernier résultat en 2°)a) en observant que $\frac{z_A}{z_B} = e^{5i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_A = e^{5i\frac{\pi}{6}}z_B$

Enfin la droite (AB) a pour image la droite (CA) car dans une rotation l'image d'une droite est une droite.

EXERCICE IV : $z_I = 1$; $z_A = 1 - 2i$; $z_B = -2 + 2i$ *donc AB* = | $z_B - z_A$ | = | $(-2 + 2i) - (1 - 2i)$| = | $-3 + 4i$ |=5 .

Et le rayon du cercle de diamètre AB est donc $R = \frac{5}{2}$.



D'autre part le milieu Ω de AB a pour affixe $z_\Omega = (z_A + z_B) / 2 =$ *(1 - 2i -2 + 2i)/2 =-1/2 =-0,5.*

$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{30+30i}{16-4i^2} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2}(1+i)$$

Donc *ΩD* = | $z_D - z_\Omega$| =| $z_D - z_\Omega$| =|2 +i/2 |=5/2.

Donc D est bien un point du cercle (C).

3°) Le point $E \in (C)$ *donc* | $z_E + 1/2$| =| $z_E - z_\Omega$|=*ΩE* =5/2 *et*

$$Arg(z_E + \frac{1}{2}) = Arg(z_E - z_\Omega) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega E}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega E}\right) = \frac{\pi}{4} \ \textit{donc}$$

$$z_E + \frac{1}{2} = z_E - z_\Omega = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d'où\ z_E = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4} \quad CQFD$$

4°) $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right)$ *donc r est la rotation de centre Ω d'affixe* $z_\Omega = -\frac{1}{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *(cf. théorème/cours)*

Dans cette rotation l'image de K est le point d'affixe $z'_K = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_K + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} = z_E$ *donc r(K) = E.*

On pouvait prévoir ce résultat du fait que par hypothèse $\left(\overrightarrow{\Omega K};\overrightarrow{\Omega E}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega E}\right) = \frac{\pi}{4}$ et *ΩK= ΩO + OK =* $\frac{5}{2}$ *donc ΩK= ΩE, c'est à dire que E est l'image de K dans la rotation de centre Ω et d'angle π/4.* ■