jml@ecole-alsacienne.org

2008-2009
30 septembre – Durée 2h.

Calculs élémentaires dans les Nombres Complexes

(Calculatrices inutiles)

EXERCICE I [Q.C.M. **avec justification** - 4 points]

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. On demande de justifier les réponses. Il sera retiré 1 point par réponse fausse ou absente et 0,5 pt par réponse non justifiée.

On pose $Z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de Z^2 est :

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ **C .** $(2+\sqrt{2}) + i(2-\sqrt{2})$ **D.** $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2. Z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A. $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ **B.** $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **C .** $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **D.** $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3. Z s'écrit sous forme exponentielle :

A. $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ **B.** $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ **C .** $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ **D.** $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4. Les nombres Réels $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ *et* $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ sont respectivement le Cosinus et le Sinus de :

A. $\frac{7\pi}{8}$ **B.** $\frac{5\pi}{8}$ **C .** $\frac{3\pi}{8}$ **D.** $\frac{\pi}{8}$

EXERCICE II [6 points]

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $[O; (\vec{u}, \vec{v})]$ d'unité graphique 1 cm.

1°) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$$

2°) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad b = 4\sqrt{3} + 4i$$

a) Écrire a et b sous forme exponentielle.
b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3) On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4) On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; - 1), (D ; + 1), (B ; + 1).

[On rappelle que $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{O}$ *]*

a) Montrer que le point G pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.
d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme
e) Quelle est la nature du triangle AGC ?

Calculs élémentaires dans les Nombres Complexes

(Calculatrices inutiles)

EXERCICE III [5 points]

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère othonormal direct d'unité graphique 2cm ou 2 carreaux. Soient A, B, C, les points d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = -1 - i\sqrt{3} \quad , \; z_C = -2$$

1°) a) Écrire z_A *et* z_B sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
b) Placer le point C et construire les points A et B dans (P).
c) Déterminer la nature du triangle ABC.

2°) On pose $Z = \frac{z_A}{z_B}$

a. Écrire Z sous forme exponentielle puis trigonométrique.
b. On considère l'application f du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{\frac{5i\pi}{6}} z$$

caractériser géométriquement l'application f.

3°) a) Déterminer les images des points A et B par f.
b) En déduire l'image de la droite (AB) par f.

EXERCICE IV [5 points]

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$.
Écrire z_D sous forme algébrique, puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?