TS BAC BLANC DE MATHEMATIQUES du 17 déc 2008

4 heures avec calculatrice

exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 2 + 2i, \quad z_B = 2i \quad \text{et} \quad z_C = 2$$

ainsi que le cercle (Γ) de centre A et de rayon 2.
La droite (OA) coupe le cercle (Γ) en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K,

a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_K = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad et \quad z_H = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -\frac{4}{z}$

2. **a.** Déterminer et placer les points images de B et C par f.

b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.

3. **a.** Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$OM \times OM' = 4.$$

b. Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

a. Calculer OK′ et OH′.

b. Démontrer que $z_{K'} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{3\pi}{4}} et z_{H'} = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

c. Expliquer comment construire les points K' et H' en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

exercice 2(5 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : g(x) = x – ln x.

a. Etudier les variations de g

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) \geq 1$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}$ et on note Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.(unité 5cm)

a. Justifier que f est bien définie sur $]0,+\infty[$

b. Déterminer la limite de f en 0 Interpréter graphiquement.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

d. Etudier les variations de f (tableau demandé)

e. Soit le point A(0 ;-1). On considère le point M(x,f(x)) pour x>0
Déterminer le coefficient θ directeur de la droite (AM) en fonction de x puis sa limite lorsque x tend vers 0

f. Interpréter graphiquement ce résultat.

g. Tracer Γ .

exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur **R** par f(x) = x+2–$\frac{4e^x}{e^x+3}$.

On désigne par *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D_1 d'équation y=.x + 2 est asymptote à la courbe *C*.

c. Etudier la position de *C* par rapport à D_1 .

2. a. On note f' la dérivée de f. Démontrer que pour tout réel x, on a : f'(x) = $\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

b. Etudier les variations de f sur **R** et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Que peut–on dire de la tangente D_2 à la courbe *C* au point I d'abscisse ln3 ?

b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de *C* par rapport à D_2 .

4. a. Montrer que la tangente D_3 à la courbe *C* au point d'abscisse 0 a pour équation y = $\frac{1}{4}$x+1.

b. Etudier la position de *C* par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty, \ln 3[$.
On pourra pour cela utiliser la dérivée seconde de f notée f'' et on pourra admettre que f''(x) = $\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$.

5. Démontrer que le point I est centre de symétrie de la courbe *C*.

6. Tracer la courbe *C* , les tangentes D_2 , D_3 et les asymptotes à la courbe *C* . On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.

exercice 4 (5 points)

1. Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ la fonction définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$

a. Etudier les variations de f sur $]-1\,;+\infty[$, en déduire les inégalités :

pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln(1+x) < x$

et pour tout $x \in]0\,;1[$, $\ln(1-x) < -x$

b. En déduire en utilisant $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{p+1}$ que pour tout entier p tel que $p \geq 1$,

on a : $\frac{1}{p+1} < \ln(1+\frac{1}{p}) < \frac{1}{p}$

2. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour $n \geq 1$ par

$u_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n$ et $v_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln(n+1)$

a. Calculer u_1 , u_2 , v_1 et v_2 . Donner pour u_2 et v_2 un encadrement d'amplitude 0,01.

b. Démontrer que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante.

c. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

d. Démontrer que leur limite commune, notée γ et appelée constante d'Euler vérifie : $0{,}40 < \gamma < 0{,}81$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)$

FIN