TS / L.Barbier   BAC BLANC DE MATHEMATIQUES du 17 déc 2008

4 heures avec calculatrice

exercice 1 (5 points)

exercice 2(5 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : g(x) = x – ln x.

a. Etudier les variations de g

g'(x)=1 - $\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ *a le signe de x – 1 car x>0*

donc $\boxed{\textit{sur }]0\,;1]\textit{ , g est strictement décroissante et sur } [1\,;+\infty[\textit{ , g est strictement croissante}}$

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) \geq 1$

donc g admet en x=1 un minimum qui vaut g(1)=1 – ln 1 = 1 – 0 = 1

donc $\boxed{\textit{sur }]0,+\infty[\textit{ , } g(x) \geq 1}$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}$ et on note Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.(unité 5cm)

a. Justifier que f est bien définie sur $]0,+\infty[$

soit x>0 :d'après la question précédente, on a $g(x) \geq 1 > 0$ *donc* $g(x) \neq 0$

De plus, ln x est défini. Donc $\boxed{\textit{f est bien définie sur }]0,+\infty[}$

b. Déterminer la limite de f en 0 Interpréter graphiquement.

en zéro, on a une forme indéterminée et c'est ln x qui devrait être prépondérant :

$$\lim_{0} f = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln x(\frac{x}{\ln x}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-1+\frac{x}{\ln x}} = \frac{1}{-1+0} = -1. \text{ Donc } \boxed{\lim_{0} f = -1}$$

On peut en déduire que $\boxed{\textit{les points de la courbe d'abscisse proche de zéro sont proches du point A(0 ;-1)}}$

(pourtant,A ne fait pas partie de la courbe car f n'est pas définie en zéro).

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

en $+\infty$ *, on a une forme indéterminée et c'est x qui devrait être prépondérant :*

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(1-\frac{\ln x}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} = 0\times \frac{1}{1-0} = 0\times 1 = 0. \boxed{\text{Donc } \lim_{+\infty} f = 0}$$

On peut en déduire que $\boxed{\Gamma \textit{ admet la droite d'équation y=0 comme asymptote horizontale en } +\infty}$

d. Etudier les variations de f (tableau demandé)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(x-\ln x) - \ln x \times (1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} = \ldots = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$ *a donc le signe de 1 – ln x*

Résolvons 1 – ln x >0 ssi ln x < 1 ssi ln x <ln e ssi x < e car ln est strictement croissante. D'où :

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	+		-	
f	‖ -1	$\nearrow$		$\searrow$	0

e. Soit le point A(0 ;-1). On considère le point M(x,f(x)) pour x>0
Déterminer le coefficient θ directeur de la droite (AM) en fonction de x puis sa limite lorsque x tend vers 0
$\overrightarrow{AM}$ *(x – 0 ; f(x) – (-1)) donc* $\theta = \dfrac{f(x)+1}{x} = (\dfrac{\ln x}{x-\ln x}+1)\times\dfrac{1}{x} = \ldots = \dfrac{x}{x-\ln x}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x-\ln x}$. Donc $\boxed{\theta = \dfrac{1}{x-\ln x}}$

f. Interpréter graphiquement ce résultat.
$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\ln x}=0}$ *car* $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln x) = -\infty$
Donc au voisinage de A, la courbe Γ a une direction proche de l'horizontale (si A était un point de Γ, on pourrait parler de tangente horizontale en A)

g. Tracer Γ .
tracez

exercice 3 (5 points)
exercice 4 (5 points)

FIN