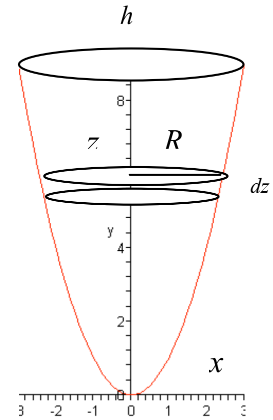
jml@ecole-alsacienne.org
2007-2008

Term.S_2 - Cont. N°9
10 mars – Durée 2h.

• Combinatoire • Équations différentielles • Intégrales •

(Calculatrices autorisées mais inutiles)



I. Champagne on the R.O.C s … Flûte ! A votre santé ! *[2 pts]*

On considère une flûte à Champagne constituée par un paraboloïde de révolution engendré par rotation d'une parabole autour de l'axe Oz et d'équation $z = x^2$.

a. Calculer le volume du verre en fonction de sa hauteur h en cm.

b. Déterminer h de telle sorte qu'avec une bouteille de Champagne de 750 ml on puisse remplir 6 flûtes (l'unité de volume est le cm^3 et … pour ceux qui ne le sauraient pas 1 ml = 1 cm^3).

c. Chacune des 6 personnes trinque avec toutes les autres, combien cela fait-il de « cloug » ! ?

II. Combinatoire … R.O.C. stars *[4 pts]*

Démontrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, et quelque soit $k \leq n$, on a les 4 égalités suivantes :

1. $n\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}(n-k)$ 2. $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$ 3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ 4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

III. I had a dream … *[2 pts]*

Dans la ville de V. il y a un réseau de transports publics extrêmement développé qui permet d'aller de n'importe quelle station x à n'importe quelle autre station y, soit directement, soit indirectement.

On suppose qu'il y a 10 stations distinctes nommées A,B, C,… J.

Un parcours est représenté par une liste ordonnée des stations.

a. Combien de parcours différents peut-on (c'est le pied !) effectuer dans cette ville en passant par toutes les stations sans jamais passer deux fois par la même ? Justifier la réponse à l'aide d'un « arbre ».

b. On considère les deux stations particulières A et E.. Combien de parcours différents partent de la station A et passent par la station E, sans jamais passer deux fois par la même station ?

c. Combien de parcours différents partent de A et s'arrêtent en E avec exactement 3 arrêts intermédiaires ?

IV. Équa-dif… faciles ! *[7 pts] On se propose de résoudre les 3 équations différentielles suivantes :*

$$(1) \quad y' + 2y = 0 \quad ; \quad (2) \quad y' + 2y = 5 \ldots ; \quad (3) \quad y' + 2y = x^2 + 3x + 5$$

1. Donner la solution générale de l'équation (1)

2. Donner la solution générale de l'équation (2)

3. Déterminer un polynôme P du second degré qui vérifie l'équation (3)

4. On pose Z = y – P, montrer que :

a. La fonction y est solution de (3) seulement si Z est solution de (1)

b. La fonction y est solution de (3) si Z est solution de (1).

5. En déduire la solution générale de l'équation (3)

6. Déterminer la solution particulière de (3) qui prend la valeur 1 en 0.

V. Intégralement vôtre …*[5 pts]*

1. *Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2e^{1-x}$. On désigne par (C) la courge représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.*

a. *Déterminer les limites de f en -∞ et en + ∞ ; quelle conséquence graphique pour (C) peut-on en tirer ?*

b. *Justifier que f est dérivable sur R . Déterminer sa fonction dérivée f ' ?*

c. *Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C).*

2. *Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :* $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

a. *Établir une relation entre I_{n+1} et I_n*

b. *Calculer I_1 ; puis I_2.*

c. *Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur la graphique du* **1.c**

3. **a.** *Démontrer que pour tout nombre réel x de [0 ;1] et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :* $x^n \leq x^n.e^{1-x} \leq e.x^n$

b. *En déduire un encadrement de I_n , puis la limite de I_n quand n tend vers +∞.*