Calculs élémentaires dans les Nombres Complexes

(Calculatrices inutiles)

EXERCICE I [6 points]

1°) On considère 2 nombres complexes donnés sous forme algébrique :

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad et \quad z_2 = 1 + i$$

a) Déterminer le module et un argument (mod. 2π) de z_1 et z_2 .
b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle.
c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = [O,(\vec{u},\vec{v})]$ construire les points A et B d'affixes respective z_1 et z_2.

2°) On pose $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

a) Déterminer le module et un argument de z_3 .
b) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
c) Construire l'image C de z_3 dans le plan complexe.
d) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{5\pi}{12})$

3°) Soit D l'image du point A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

a) Déterminer le module et un argument de l'affixe z_4 du point D.
b) Montrer que $z_4 = \overline{z_1}$
c) Soit E l'image du point D dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$
d) Déterminer l'affixe z_5 du point E.

4°) Soit $Z = \dfrac{z_4 - z_5}{z_1 - z_5}$

a) Calculer le module et l'argument de Z.
b) E n déduire la nature du triangle ADE.

EXERCICE II [5 points] On pose $Z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer Z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et l'argument de Z^2
3. Écrire Z^2 sous forme exponentielle et sous forme trigonométrique.
4. En déduire la forme exponentielle de Z.
5. Puis en déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{8})$

EXERCICE III [4 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = [O,(\vec{u},\vec{v})]$ (Unité : 2 carreaux),
On considère les 4 points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = -i \ , z_B = 3 \ , z_C = 2 + 3i \ , z_D = -1 + 2i$$

1°) Placer les points A,B,C,D sur la figure.
2°) Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$$

3°) Calculer Z sous forme algébrique.
4°) En déduire le module et l'argument de Z
5°) Que peut-on en conclure pour les segments [AC] et [BD]
6°) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Calculs élémentaires dans les Nombres Complexes

(Calculatrices inutiles)

EXERCICE IV [5 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = [O,(\vec{u},\vec{v})]$ (Unité : 2 cm).

On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

1°) Vérifier que 1 , j , j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

2°) On appelle A, B, C les images respectives de 1 , j , j^2

i. Construire A, B, C dans le plan
ii. Que peut-on dire du triangle ABC ? Justifier la réponse.

3°) Calculer $(1 – j)(1 + j + j^2)$

4°) en déduire que $1 + j + j^2 = 0$

5°) Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2 = 0$

6°) Montrer que $j^2 = \overline{j}$

7°) Calculer de même $1 + \overline{j} + \overline{j}^2$