Similitudes / Complexes

[Amérique du Sud Nov. 2007]

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
   Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.
3. On note f la composée $H \circ S$.
   - **a.** Montrer que f est une similitude.
   - **b.** Déterminer l'écriture complexe de f.
4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.
   - **a.** Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la droite (AB).
   - **b.** Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

Similitudes / Complexes

[Amérique du Sud Nov. 2007]

Corrigé

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidéplacement) est de la forme $z' = a\overline{z} + b$. A et B invariants par cette symétrie se traduit par :

$$\begin{cases} 1 = a \times 1 + b \\ \mathrm{i} = a \times (-\mathrm{i}) + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = a + b \\ \mathrm{i} = -a(\mathrm{i}) + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = a + b \\ 1 - \mathrm{i} = a(1+\mathrm{i}) \end{cases} \iff$$

$$\text{(par différence)} \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = a \\ 1 = a + b \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-2\mathrm{i}}{2} = a \\ 1 = a + b \end{cases} \iff \begin{cases} -\mathrm{i} = a \\ 1 + \mathrm{i} = b \end{cases}$$

L'écriture complexe est donc : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. $f = H \circ S$.

a. La réflexion S est une similitude de centre A ; donc la composée de deux similitudes de même centre est une similitude de même centre A.

b. Écriture complexe :

- pour S, on a vu que l'écriture complexe est : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
- pour H : $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M'} \iff z'' - 1 = -2(z' - 1) \iff$ $z'' = 1 - 2(z' - 1) = -2z' + 3$
- donc $z'' = -2\left(-\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}\right) + 3 = 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i}$.

Soit $M(z)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M} \iff z'' - 1 = -2(z - 1) \iff$
$2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2z + 2 \iff 2\mathrm{i}\overline{z} + 2z = 1 + 2\mathrm{i}$. (1)

En posant $z = x + \mathrm{i}y$, $2\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) + 2(x + \mathrm{i}y = 1 + 2\mathrm{i}(1) \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2x = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

Les points $M(x\,;\,y)$ qui vérifient la relation sont tels que $x + y = 1$ qui est l'équation de la droite (AB).

Inversement un point M de la droite (AB) a pour image par S M et ensuite on a bien par la transformation h $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$.

L'ensemble cherché est donc toute la droite (AB).

c. De même $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M} \iff z'' - 1 = 2(z - 1) \iff 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i} = 2z - 2 \iff$ $2\mathrm{i}\overline{z} - 2z = -3 + 2\mathrm{i}$ (2).

Si $M(x\,;\,y)$, alors (2) $\Rightarrow \begin{cases} 2y - 2x = -2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$

Les points $M(x\,;\,y)$ sont tels que $x - y = 1$ qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB) (coefficient directeur 1, alors que celui de (AB) est -1), et qui contient le point A (le couple $(1\,;\,0)$ vérifie l'équation).

Inversement un point M de la perpendiculaire trouvée a pour coordonnées $(x\,;\,x - 1)$.

On vérifie que $z'' - 1 = 2\mathrm{i}x + 2x - 2 - 2\mathrm{i}$ et que
$2(z - 1) = 2\mathrm{i}x + 2x - 2 - 2\mathrm{i}$.

L'ensemble cherché est donc toute la perpendiculaire à (AB) contenant A.