

Similitudes / Complexes / Espace
(Liban juin 2008)

Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère la similitude directe f d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

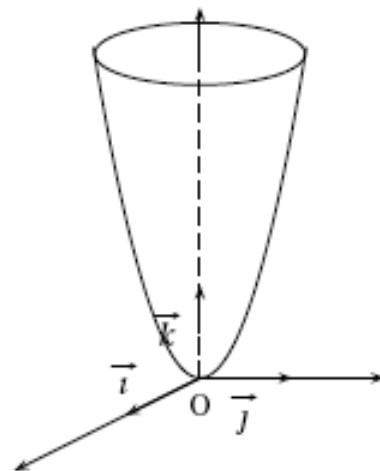
Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La surface Σ ci-contre a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leq a \leq b \leq 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k) dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a, b]$.