Isométries / Complexes

[Pondidhéry Mai 2005]

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.

Démontrer que : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$

2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x+iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.

Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Isométries / Complexes

[Pondidhéry Mai 2005]

Corrigé

1. $z' = \dfrac{3+4i}{5}\overline{z} + \dfrac{1-2i}{5} \iff x' + iy' = \dfrac{3+4i}{5}(x - iy) + \dfrac{1-2i}{5} = \dfrac{3x+4y+1+i(4x-3y-2)}{5}$.
Par identification :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2. **a.** M est invariant si et seulement si $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 2x-4y-1 = 0 \\ 4x-8y-2 = 0 \end{cases} \iff 2x-4y-1=0$. Conclusion : les points M invariants appartiennent à la droite d'équation $2x-4y-1=0$.

b. L'application f a une écriture complexe de la forme $z' = a\overline{z}+b$ avec $|a| = 1$: c'est donc une symétrie axiale d'axe la droite d'équation $2x-4y-1=0$.

3. Le complexe z' est réel si et seulement si $y' = 0 \iff 4x-3y-2=0$. L'ensemble D est donc la droite d'équation $4x-3y-2=0$.

4. **a.** Le couple $(2\,;2) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie l'équation $4x-3y-2=0$.

b. Si $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution quelconque de l'équation $4x-3y-2=0$, alors

$$\begin{cases} 4x-3y-2 = 0 \\ 4\times 2 - 3\times 2 - 2 = 0 \end{cases},$$

d'où par différence $4(x-2)-3(y-2) = 0 \iff 4(x-2) = 3(y-2) \quad (1)$. Donc 3 divise $4(x-2)$ mais étant premier avec 4, divise $x-2$, d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-2 = 3k \iff x = 3k+2$. En reportant dans (1) on obtient $4k = y-2 \iff y = 4k+2$.

Inversement $4(3k+2)-3(4k+2)-2 = 12k+8-12k-6-2 = 0$; donc les couples $(3k+2\,;\,4k+2)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les couples solutions de l'équation $4x-3y-2=0$.

5. Si $x = 1$, x' et y' sont des entiers $\iff \begin{cases} 3x+4y+1 \equiv 0 \mod 5 \\ 4x-3y-2 \equiv 0 \mod 5 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 4y+4 \equiv 0 \mod 5 \\ 2-3y \equiv 0 \mod 5 \end{cases} \longleftrightarrow y+6 \equiv 0 \mod 5 \iff y \equiv -1 \mod 5 \iff y \equiv 4 \mod 5 \iff y = 5k+4$.

Inversement, si $x = 1$ et $y = 5k+4$, alors $x' = \dfrac{4+4(5k+4)}{5} = \dfrac{20k+20}{5} = 4k+4 \in \mathbb{Z}$ et $y' = \dfrac{2-3(5k+4)}{5} = \dfrac{-15k-10}{5} \in \mathbb{Z}$.