Exercice de Spécialité / Pondichéry- Avril 2004

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).

a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.

b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

4. Soit $M(x,\ y,\ z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

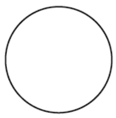

Figure 1

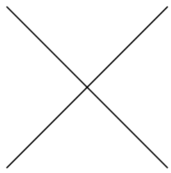

Figure 2

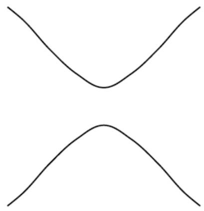

Figure 3

Corrigé / Pondichéry- Avril 2004

1. On se place dans le plan $\mathrm{P}_0 = y\mathrm{O}z$ d'équation $x = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ a pour coordonnées (5 ; −5) et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ a pour coordonnées (5 ; 5).
$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 25 - 25 = 0$.
La droite (OA) est tangente au cercle C.

2. **a.** Équation du cône Γ
D'après la question précédente le triangle OAB est rectangle en A. $\mathrm{OA}^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $\mathrm{OA} = \sqrt{2}$.
$\mathrm{AB}^2 = 0^2 + 5^2 + (10-5)^3 2 = 50$, donc $\mathrm{AB} = 5\sqrt{2}$.
Le triangle OAB est donc rectangle isocèle et $\widehat{\mathrm{AOB}} = \dfrac{\pi}{4}$.
L'équation du cône d'axe (Oz), et de sommet O est de la forme

$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\theta$, θ étant la mesure de l'angle formé par la génératrice (OA) et l'axe, soit ici $\dfrac{\pi}{4}$. Or $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$.

$\boxed{\text{L'équation de } \Gamma \text{ est donc } x^2 + y^2 = z^2.}$

b. D'après la première question la génératrice du cône est tangent au cercle qui génère la spère : le cône est donc tangent à la sphère l'intersection est constitué par la rotation du point A autour de (Oz) ; c'est donc le cercle de centre le point C projeté de A sur (Oz) soit C(0 ; 0 ; 5) et de rayon CA = 5.

3. L'intersection d'un cône par un plan parallèle à l'axe de ce cône qui ne contient pas cet axe est une hyperbole.

4. Hypothèse : x et y sont des impairs ; il existe donc $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2p + 1$ et $y = 2q + 1$.
On a donc $z^2 = x^2 + y^2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4p + 4q + 2 = 2\left[2p^2 + 2q^2 + 2p + 2q + 1\right] = 2\left[2\left(p^2 + q^2 + p + q\right) + 1\right]$.
$2\left(p^2 + q^2 + p + q\right) + 1$ est un nombre impair, donc z^2 est un multiple de 2 non multiple de 4 : ceci est impossible.
Conclusion : x et y ne peuvent être simultanément impairs.

Exercice de Spécialité / France - Juin 2003

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* 1. *et* 2. *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1. c.** *intervient à la question* **4.**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de l avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

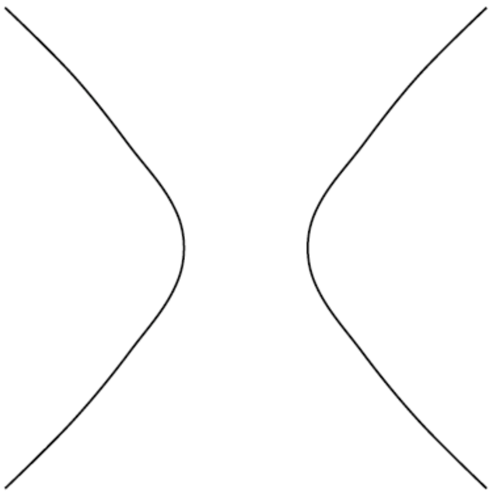

Figure 1

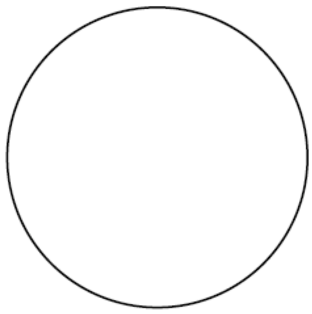

Figure 2

3. **a.** Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution,

b. Montrer la propriété suivante :

pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. **a.** Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Corrigé / France - Juin 2003

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

Les vecteurs orthogonaux à P et Q sont respectivement $\vec{u}(1, \sqrt{3}, -2)$ et $\vec{v}(2, 0, -1)$. Ils ne sont pas colinéaires donc **P et Q ne sont pas parallèles.**

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

$\begin{cases} x + \sqrt{3}y - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$. On choisit $x = t$ et on obtient : $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t \end{cases}}$.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe $(\mathrm{O}x)$ contenant la droite Δ comme génératrice. Montrer que Γ a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

On sait qu'un cône d'axe $(\mathrm{O}x)$ a une équation du type $y^2 + z^2 = kx^2$. Pour calculer k on prend un point $\mathrm{M}(t\ ;\ t\sqrt{3}\ ;\ 2t)$ de la droite Δ et $y^2 + z^2 = 3t^2 + 4t^2 = 7t^2 = 7x^2$.

2. On a représenté dans l'énoncé les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

La figure 1 représente une hyperbole donc l'intersection du cône avec un plan parallèle à l'axe du cône ne contenant pas cet axe soit d'équation $ay + bz = c$ avec $c \neq 0$.

La figure 2 représente un cercle donc l'intersection du cône avec un plan orthogonal à son axe soit un plan d'équation $x = c$.

3. a. **Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.**

Si $x \equiv 0\ [7]$ alors $x^2 \equiv 0\ [7]$, si $x \equiv 1\ [7]$ alors $x^2 \equiv 1\ [7]$, si $x \equiv 2\ [7]$ alors $x^2 \equiv 4\ [7]$, si $x = 3\ [7]$ alors $x^2 \equiv 2\ [7]$, si $x \equiv 4\ [7]$ alors $x^2 \equiv 2\ [7]$, si $x \equiv 5\ [7]$ alors $x^2 \equiv 4\ [7]$ et si $x \equiv 6\ [7]$ alors $x^2 \equiv 1\ [7]$. On voit que, pour tout x, x^2 n'est jamais congru à 3 modulo 7.

b. Montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

D'après la question précédente si a ou b ne sont pas congrus à 0 modulo 7 alors $a^2 + b^2$ est congru à $0 + 1 = 1$ ou $0 + 2 = 2$ ou $0 + 4 = 4$ ou $1 + 1 = 2$ ou $1 + 2 = 3$ ou $1 + 4 = 5$ ou $2 + 2 = 4$ ou $2 + 4 = 6$ ou $4 + 4 = 8 \equiv 1\ [7]$. Donc $a^2 + b^2$ n'est pas un multiple de 7. Pour que ce soit un multiple de 7 il faut et il suffit que a et b soient des multiples de 7.

4. a. Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :
si le point A de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

Si A est un point du cône alors $b^2 + c^2 = 7a^2$ donc 7 divise $b^2 + c^2$, 7 divise b et c (d'après **3.b**), soit $b = 7b'$ et $c = 7c'$ d'où :

$$7a^2 = 49b'^2 + 49c'^2 \text{ soit } a^2 = 7(b'^2 + c'^2)$$

7 divise a^2 et 7 étant premier donc 7 divise a.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

On suppose a, b et c non nuls, on pose $a = 7a'$, $b = 7b'$ et $c = 7c'$. On suppose que l'un des nombres a', b' ou c' n'est plus multiple de 7 (sinon on recommence), on a :

$$7a'^2 = b'^2 + c'^2$$

qui ne peut avoir lieu que pour des multiples de 7, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse donc **les nombres a, b et c sont nuls.**