Probabilités

[Bac Pondichéry 2007]

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les évènements :
A : « au moins une personne accepte de répondre »
B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».
Calculer les probabilités des évènements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ P(X=k)=\dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!} \\ \text{et } P(X=n)=1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a=\dfrac{n}{10} \end{array}\right.$$

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a)=1-\mathrm{e}^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x)=1-\mathrm{e}^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right).$$

ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

b. Montrer que l'équation $f(x)=0{,}95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre $6{,}29$ et $6{,}3$.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.