CHAPITRE 4

PRIMITIVES

Problématique : Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Déterminer | l'existence / l'unicité | d'une fonction F dont dérive f.

ie $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$

Une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ s'appelle une PRIMITIVE de f.

Théorème ① : Deux primitives quelconques d'une ~~m~~ fonction ne diffèrent que par une CONSTANTE.

En effet Si $F'_1(x) = f(x)$ et $F'_2(x) = f(x)$
$\Downarrow$
Alors $\boxed{F_1(x) - F_2(x) = \text{cste}}$

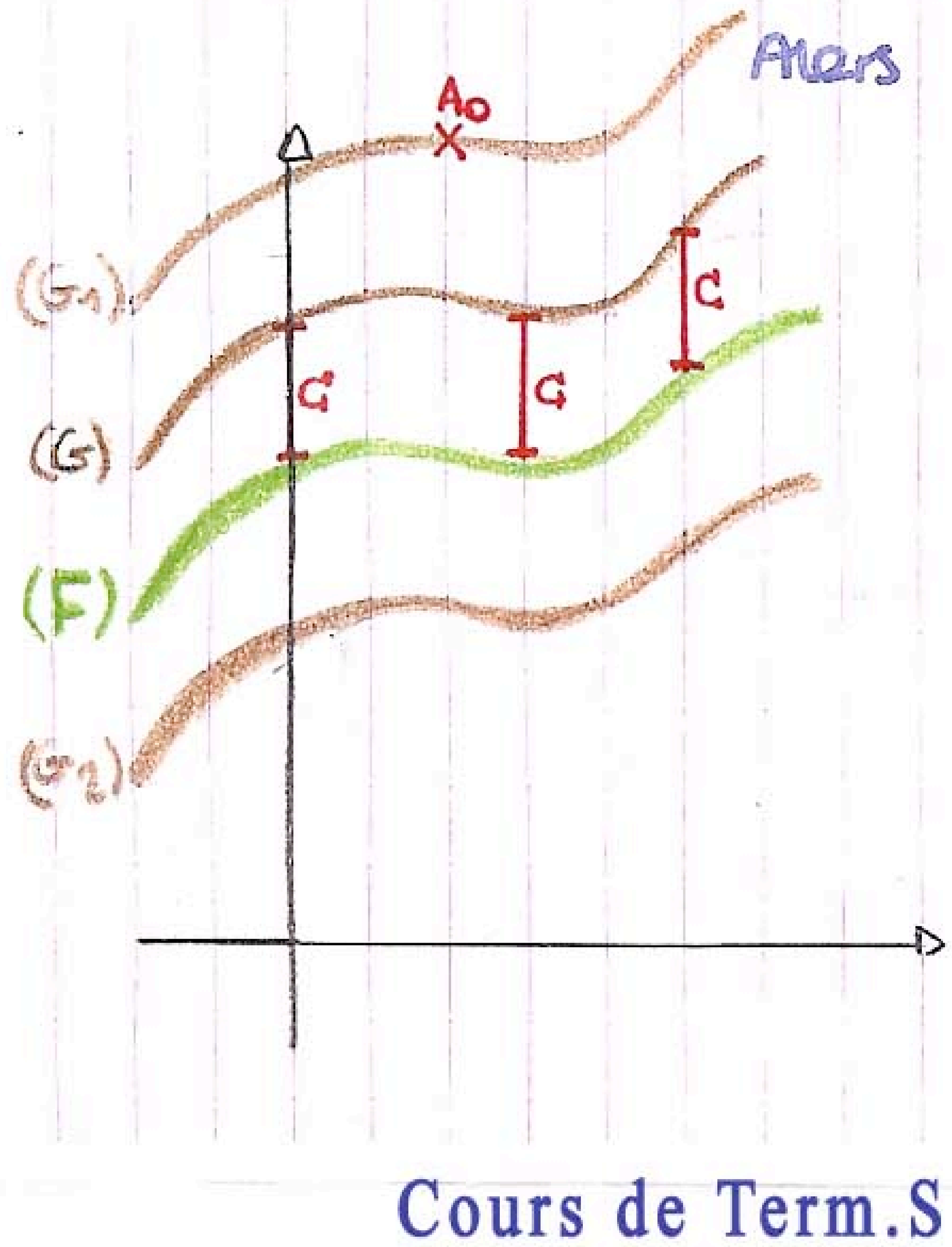
Démo :

$$\left.\begin{array}{l} F'_1(x) - F'_2(x) = 0 \\ (F_1(x) - F_2(x))' = 0 \end{array}\right| \text{ sur } D_f$$

$$\Rightarrow \; F_1(x) - F_2(x) = \text{cste} = C \quad \text{sur } D_f$$
$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Théorème ① bis : Si F est une PRIMITIVE de f (sur I)

Alors | quelque soit C cste réelle (fixée)
$G(x) = F(x) + C$ est encore une PRIMITIVE de f.



MARDI 14 NOVEMBRE 2000

Démo instantanée : $G'(x) = F'(x) + 0 = f'(x)$

Illustration ci-contre
$\Rightarrow$ "COURBES INTÉGRALES"

$G(x) = F(x) + C \quad (C > 0)$
$G_1(x) = F(x) + C_1 \quad (C_1 > 0)$
$G_2(x) = F(x) + C_2 \quad (C_2 < 0)$

Théorème ② : Soit F une PRIMITIVE de f (sur I)

Il existe une et une seule primitive F_0 de f qui prend la valeur y_0 en x_0.
(La courbe $\mathcal{C}_0$ de F_0 passe par le pt $A_0(x_0; y_0)$).

Démo :
$F_0(x_0) = y_0$ — F donnée (f donnée)
$F_0(x) = F(x) + \text{cste}$ — C ?
qq soit $x \in I$

$C = F_0(x_0) - F(x_0) = y_0 - F(x_0)$ VALEUR UNIQUE

$\Rightarrow F_0(x) = F(x) + [y_0 - F(x_0)]$

Seule primitive de f passant par $A(x_0; y_0)$

ex : Soit $f(x) = x^2 + 3x - 2$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$

C ? pour que $F(2) = -4$

$\Rightarrow \frac{8}{3} + 6 - 4 + C = -4$

donc $C = -\frac{8}{3} - 6 + 4 - 4 = -\frac{26}{3}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x - \frac{26}{3}$

C ? pour que $F(0) = 0$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x$

TABLEAU DE CALCUL DES PRIMITIVES DES F° ÉLÉMENTAIRES

	F (PRIMITIVE de f)	f = F'
①	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (+ C)	x^n
②	$-\frac{1}{x}$ (+ C)	$\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
③	$\frac{2x^{3/2}}{3} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ (+ C)	$\sqrt{x} = x^{1/2}$ $(x > 0)$
④	$2\sqrt{x}$ (+ C)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
⑤	(C+) $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (démo à faire)	x^α $(\alpha \neq -1$ et $\alpha \in \mathbb{R})$
⑥	? ($\Rightarrow$ logarithme népérien)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
⑦	$-\cos x$ (+ C)	$\sin x$
⑧	$\sin x$ (+ C)	$\cos x$
⑨	? Z	$\tan x$
⑩	$\tan x - x$ (+ C)	$\tan^2 x$

TABLEAU D'OPÉRATIONS SUR LES PRIMITIVES

on suppose que l'on connaît deux fonctions u, v et leurs dérivées u', v'

F (PRIMITIVE de f) $\xleftarrow{\text{INTÉGRATION}}$ $\xrightarrow{\text{DÉRIVATION}}$	f = F'
$u + v$ (+ C)	$u' + v'$
λu (+ C)	$\lambda u'$

F primitive de f	f = F'
$uv \quad (+C)$	$u'v + uv'$
?	$u'v'$
$\frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} \quad (+C)$	$u^n \times u'$
$\frac{u}{v} \quad (+C)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
?	$\frac{u'}{v'}$
?	$\frac{1}{u^2}$
$-\frac{1}{u} \quad (+C)$	$\frac{u'}{u^2}$
?	$\sqrt{u}$
?	$\frac{1}{\sqrt{u}}$
$2\sqrt{u} \quad (+C)$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
⇒ $\ln \lvert u \rvert \quad (+C)$	$\frac{u'}{u}$
?	$\sin u$
$-\cos u \quad (+C)$	$(\sin u) . u'$
$\sin u \quad (+C)$	$(\cos u) . u'$
?	$\tan u \; ; \; \tan^2 u$
$(\tan u) - u \quad (+C)$	$(\tan^2 u) . u'$
$F(x) = v[u(x)]$	$v'[u(x)] \times u'(x)$ DÉRIVÉE DE F° COMPOSÉES

MERCREDI 15 NOVEMBRE 2000

TABLEAU III : EXEMPLES

exercices livre pp 123 à 128

F (PRIMITIVE de f, à une cste près)	$f = F'$
$\frac{x^4}{4} - 5.\frac{x^3}{3} + 9.\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$	$x^3 - 5x^2 + 9x - \frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{3} \times \frac{(3x+1)^4}{4} = \frac{(3x+1)^4}{12}$	$(3x+1)^3 = \frac{1}{3}\left[3(3x+1)^3\right]$
$27.\frac{x^7}{7} + 27.\frac{x^5}{5} + 3x^3 + x$	$(3x^2+1)^3 = 27x^6 + 27x^4 + 9x^2 + 1$
$-\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x+1}$	$\frac{1}{(3x+1)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x+1)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u^2}$
?	$\frac{1}{(3x^2+1)^2}$
$\frac{1}{4} \times 2\sqrt{4x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$	$\frac{1}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{4x+1}}$
$2\sqrt{x^2+x+2}$	$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{1}{4}(x^3+x^2+x-1)^4$	$(3x^2+2x+1)(x^3+x^2+x-1)^3$
⇒ $\ln\lvert x^2+x+1\rvert$	$\frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{u'}{u}$
$\frac{x^2}{2} + 3x + 4\ln\lvert x-1\rvert - \frac{2}{x-1}$	$\frac{x^3+x^2-x+1}{(x-1)^2} = x+3+\frac{4x-2}{(x-1)^2}$ $= x+3+2\,\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ $= x+3+2\left[\frac{2x-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]$ $= x+3+\frac{4}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$
$x + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$	$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ 41 p 125
$3x + \frac{11}{x+2}$	$\frac{3x^2+12x+1}{(x+2)^2} = \frac{3[(x+2)^2-4]+1}{(x+2)^2}$ $= 3 - \frac{11}{(x+2)^2}$
$-\frac{1}{u} = -\frac{4}{x^2-4}$	$\frac{8x}{(x^2-4)^2} = 4\,\frac{2x}{(x^2-4)^2} = 4\,\frac{u'}{u^2}$

$-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$	$\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)^2+2x}{[(x-1)(x+1)]^2}$ $= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{(x^2-1)^2}$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b) = \frac{1}{a}[a\sin(ax+b)]$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b) = \frac{1}{a}[a\cos(ax+b)]$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos 2x}$	$\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} = \frac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ $= \frac{1}{2}\left(-\frac{u'}{u^2}\right)$
$-\frac{1}{(x-\sin x)}$	$\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} = \frac{u'}{u^2}$
$-\frac{1}{\tan x/2}$	$\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x/2}$ $= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\tan^2 x/2}\right] = \frac{1/2\,(1+\tan^2 x/2)}{\tan^2(x/2)}$ $\frac{u'}{u^2}$ avec $u = \tan x/2$

56 p 126

56 p 126

59 p 126 (BAC 198x)

① $f : x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ PRIMITIVE de $f : x \xrightarrow{F}$?

② Soit $G(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ calculer $G'(x)$.

③ En déduire une primitive de $h : x \longmapsto \frac{1}{\cos^4 x}$

⇒ RÉSOLUTION :

① $F(x) = \tan x$ car $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

② $$\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)' = \frac{\cos x\cos^3 x - \sin x . 3\cos^2 x . (-\sin x)}{(\cos^3 x)^2}$$
$$= \frac{\cos^4 x - \sin x . 3\cos^2 x . (-\sin x)}{\cos^6 x}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)' = \frac{\cos^2 x\,[\cos^2 x + 3\sin^2 x]}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3 - 3\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

③ $$\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)' + \frac{2}{3}\left(\tan x\right)'$$

$\Rightarrow$ PRIM. de $\dfrac{1}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{2}{3}\tan x + C$