Déplacements et Antidéplacements • Produit d'une REFLEXION par une TRANSLATION

Mode d'emploi : prendre un paquet de feuilles de brouillons, refaire les figures et écrire les équations vectorielles correspondant à chaque cas. *Références : Chapître 13 / Terracher / Term.S / Spécialité.*

Soit S_D une Réflexion d'axe (D) définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit $t_{\vec{v}}$ une Translation de vecteur $\vec{v}$.
On étudie les transformations **f =** $t_{\vec{v}} \circ S_D$ et **g =** $S_D \circ t_{\vec{v}}$

NB:dans le contexte des transformations du plan les mots »produit » et »composée », notés (∘), sont synonymes.

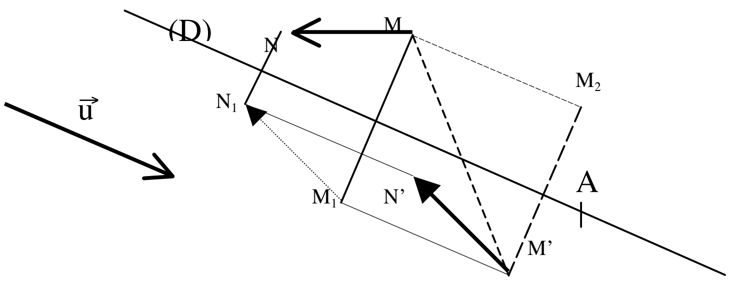
NB' : On dit que deux transformations coïncident en un point si elles donnent la même image de ce point.

*RAPPELS : 1°) On appelle **Transformation** du Plan, toute Bijection du Plan sur lui-même.*
Ex : translation, homothétie, rotation, symétrie centrale, symétrie axiale, similitude, et leurs composées.
*2°) On appelle **Isométrie** du Plan toute Transformation qui conserve les distances.*
Ex : translation, ~~homothétie~~, rotation, symétrie centrale, symétrie orthogonale, ~~similitude~~.
*3°) On appelle **Déplacement** toute Isométrie qui conserve le sens de angles.*
Ex : translation, ~~homothétie~~, rotation, symétrie centrale~~, symétrie axiale~~, ~~similitude~~.
*4°) On appelle **Anti-Déplacement** toute Isométrie qui inverse le sens des angles.*
Ex ~~: translation, homothétie, rotation, symétrie centrale~~, symétrie orthogonale (Réflexion), ~~similitude~~.
Dans les paragraphes qui suivent on va étudier un anti-déplacement particulier : la Symétrie-glissée.

REMARQUE : Le mot de Déplacement évoque évidemment le mouvement d'une figure plane et rigide que l'on fait bouger dans le plan sans jamais la retourner sur elle-même. Au contraire l'Anti-déplacement évoque le fait que l'on a retourné la figure nombre impair de fois.

On classe les Isométries également par le nombre de points fixes qu'elles possèdent :
Aucun point fixe : Translations et Symétries-glissées.
1 point fixe : Homothéties, Rotations, Symétries Centrales, Similitudes.
Plus d'un point fixe : Réflexion (Symétrie Orthogonale).
NB : Théorèmes des points fixes : on démontre que :
1°) Si une Isométrie possède au moins un point fixe c'est une Rotation (éventuellement l'Id_P) ou une Réflexion.
2°) Si une Isométrie possède au moins 2 points fixes alors cela ne peut-être qu'une Réflexion ou l'Identité.
3°) Si une Isométrie possède 3 points fixes non alignés cela ne peut-être que l'Identité dans le Plan.
4°) Enfin (par conséquence immédiate) si deux isométries coïncident en au moins 3 points non alignés alors elles sont nécessairement identiques.
Cas Particulier : si deux Rotations de même angle coïncident en au moins un point alors elles sont identiques, i.e. qu'elles ont même centre et même angle. Ce résultat permet de trouver le centre d'une rotation en la comparant à une rotation connue.

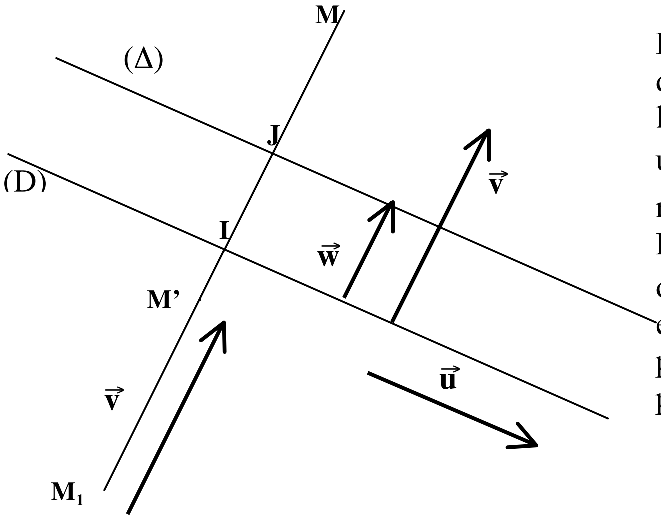
$\boxed{1^{er}\text{ cas}}$ $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **colinéaires :** l'application **f =** $t_{\vec{v}} \circ S_D$ se nomme **Symétrie-glissée** ou symétrie-translation.



On démontre facilement que cette transformation n'admet aucun point fixe (donc ce n'est pas une Réflexion) et qu'elle n'est pas non plus une Translation (car l'image d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ quelconque, est un vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ de même norme mais non colinéaire à $\overrightarrow{MN}$).
Le « produit » d'une Symétrie Orthogonale par une Translation de même direction que l'axe ne se réduit donc à aucune des Isométries simples. On doit donc la considérer comme une isométrie particulière.
Dans la Réflexion d'axe (D) les distances sont conservées, mais les angles sont inversés, par contre dans la translation les distances et les angles sont conservés. Donc globalement l'application f est une isométrie qui inverse les angles, c'est à dire un **anti-déplacement**.
La figure montre à l'évidence que dans ce cas particulier le produit est commutatif : g = f.

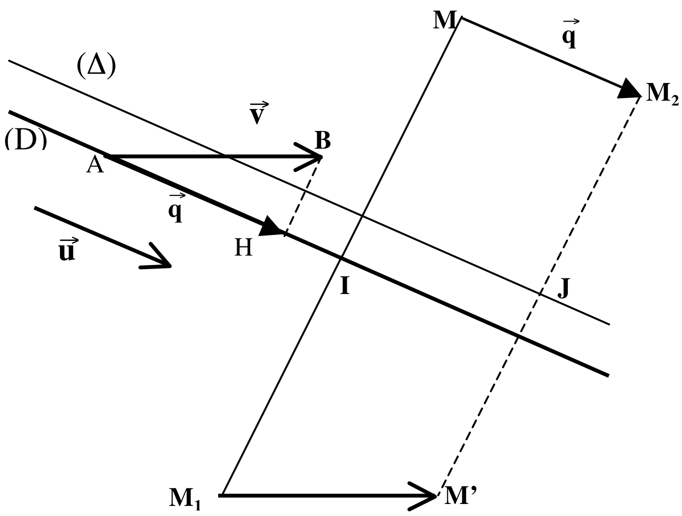
Déplacements et Antidéplacements • Produit d'une REFLEXION par une TRANSLATION

2e cas $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **perpendiculaires :** l'isométrie **f** = $t_{\vec{v}} \circ S_D$ est une **Réflexion** d'axe (D) parallèle à (D). Avec (D) image de (D) par la translation de vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$



Pour démontrer ce résultat il suffit d'écrire les relations vectorielles qui lient les points M, M_1, et M' et en utilisant la relation $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\vec{v}$ on obtient la relation $\overrightarrow{JM'} = -\overrightarrow{JM}$.
Pour l'isométrie $g = S_D \circ t_{\vec{v}}$ on opère de la même manière et on obtient également une Réflexion d'axe (D') parallèle à (D). Avec (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{w}' = -\frac{1}{2}\vec{v}$

3e cas $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **Non Colinéaires :** l'isométrie **f** = $t_{\vec{v}} \circ S_D$ se ramène à une **Symétrie-Glissée** d'axe (Δ) // (D) et de vecteur $\vec{q}$ = proj.($\vec{v}$ sur $\vec{u}$), c'est à dire que **f** = $t_{\vec{q}} \circ S_D$. (Δ) étant obtenu par une translation de vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$ appliquée à (D).



Démo : on a $S_D \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{BH}}$
Donc par composition à droite avec S_Δ on obtient $S_D = t_{\overrightarrow{BH}} \circ S_\Delta$
et par suite $t_{\vec{v}} \circ S_D = t_{\vec{v}} \circ t_{\overrightarrow{BH}} \circ S_\Delta$.
Or on a $t_{\vec{v}} \circ t_{\overrightarrow{BH}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BH}} = t_{\overrightarrow{AH}}$
Par suite on a f = $t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_\Delta$. **(CQFD)**
On démontrerait de même que l'isométrie g est une symétrie-glissée d'axe (Δ') // (D) et de vecteur directeur $\vec{q}$ =p.$\vec{v}$ sur $\vec{u}$. (Δ') étant déduit de (D) par une translation de vecteur $\vec{w}' = -\frac{1}{2}\vec{v}$

<u>En Résumé</u> : le produit d'une symétrie orthogonale par une translation est une symétrie-translation ou symétrie-glissée, sauf lorsque le vecteur de la translation est un vecteur normal à l'axe de symétrie ; dans ce cas c'est une réflexion.

<u>Rappel</u> le produit d'une symétrie orthogonale par une rotation est une réflexion ou une symétrie-glissée car la composition d'un déplacement et d'un anti-déplacement ne peut être qu'un anti-déplacement.
En effet la rotation se décompose en produit de réflexions, le problème se ramène donc à celui d'un produit de 3 réflexions ; selon la position relative des axes on pourra obtenir une réflexion pure ou une symétrie-glissée si l'un des axes de la décomposition de la rotation est parallèle à l'axe de réflexion donné.

NB Ces résultats ne sont pas à apprendre par cœur mais les méthodes de décomposition ou de recomposition sont remarquables et doivent être connues pour pouvoir faire les exercices.

Déplacements et Antidéplacements • Produit d'une REFLEXION par une TRANSLATION

Equations Complexes d'un Déplacement et d'un ANTI-DÉPLACEMENT

Rappel : toute application complexe de la forme z -> z' = a z + b avec a î ℂ et b î ℂ, et | a | = 1 est une translation si a =1, une rotation si a ¹1, une homothétie si a Î R.

On détermine les éléments de ces transformations en recherchant un point fixe (solution de l'équation obtenue en faisant z' = z).

Si $\boxed{a \neq 1}$ le point fixe est le point d'affixe **w = b/(1-a)** et on peut écrire l'équation sous la forme

$$z' - \omega = a(z - \omega) \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = a \Leftrightarrow (\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}) = Arg(a) \quad et \quad \frac{\|\overrightarrow{IM'}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|} = |a|$$

Si $\boxed{|a| \neq 1}$ la transformation associée est une similitude de centre I d'affixe (w), de rapport k = | a | et d'angle α = Arg (a) [2π].

Théorème des anti-déplacements : toute application complexe de la forme $z \mapsto z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in C$ et $b \in C$, et | a | = 1, est un anti-déplacement c'est à dire une réflexion ou une symétrie glissée.

Cas particuliers remarquables :

1°) la transformation $z \mapsto z' = \bar{z}$ est la réflexion d'axe Ox dans le plan complexe.

2°) la transformation $z \mapsto z' = -\bar{z}$ est la réflexion d'axe Oy dans le plan complexe.

3°) la transformation $z \mapsto z' = a\bar{z}$ est la réflexion d'axe (D) dont un vecteur directeur fait avec Ox un angle égal à la moitié de l'argument de a.

4°) la transformation $z \mapsto z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in C$ et $b \in C$, et | a | = 1, est la composée de la précédente avec la translation de la forme $z \mapsto z' = z + b$ c'est donc bien une réflexion ou une symétrie glissée.

Pour savoir dans quel cas on se trouve il suffit de rechercher les points fixes éventuels.

S'il y a des points fixes c'est une réflexion (ou l'identité) sinon c'est une symétrie glissée.

La plupart des exercices (voir exos faits en classe dans les annales consistent à déterminer la position des axes et le vecteur de la translation). En général il suffit de suivre exactement les questions des énoncés sans chercher à appliquer directement les théorèmes ci-dessus.

Dernier rappel la composée de deux translations est encore une translation, mais la composée de deux symétries centrales S_O et $S_{O'}$ dans cet ordre est une translation de vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{OO'}$ (démo instantanée : faire la figure).

*Enfin la composée d'une symétrie Centrale **S_O** et d'une Translation $t_{\vec{v}}$ est une symétrie centrale dont le centre O' se déduit de O par une translation de vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$.*

Là aussi il suffit de faire les figures et d'écrire les relations vectorielles associées pour en faire la preuve.

NB : Attention ces deux derniers produits ne sont pas commutatifs. !

Citation du jour ...pour les spécialistes !

"For every problem there is a solution which is simple, clean … and wrong"

(Henry Louis Mencken)

Good Luck !