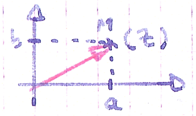
CHAPITRE 1

# Nombres Complexes

## Généalogie des nombres

| Nombres | Equations résolubles | Equations non résolubles |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ Entiers naturels<br>0 1 2 … n | (1) $x+5=8$ $(x=3)$<br>(2) $3x=15$ $(x=5)$ | (1bis) $x+8=5$<br>(2bis) $5x=3$<br>Pas de sol ds $\mathbb{N}$ |
| $\mathbb{Z}$ Entiers relatifs<br>−n … −1 0 1 2 … n | (1bis) $x+8=5$ $(x=-3)$<br>(3) $3x+2=17$<br>(4) $3x=-15$ | (2bis) $5x=3$<br>(5) $ax+b=0$<br>Pas de sol ds $\mathbb{Z}$<br>ds certains cas |
| $\mathbb{Q}$ Nb rationnels<br>−n $-\frac{4}{3}$ −1 0 n | (5) $ax+b=0$<br>sol: $(a\neq 0)$ $x=-\frac{b}{a}$<br>(6) $x^2=\frac{25}{4}$ | (7) $x^2=2$<br>(8) $x^2+x-1=0$<br>(9) $x^2+x+1=0$<br>Pas de sol ds $\mathbb{Q}$ |
| $\mathbb{R}$ Nb réels<br>$-\sqrt{2}$ −1 0 $\frac{2}{3}$ n | (10) $ax^2+bx+c=0$<br>avec $a\neq 0$ et $\Delta\geq 0$<br>sol: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ | (11) $ax^2+bx+c=0$<br>avec $a\neq 0$ $\Delta<0$<br>(12) $x^2+1=0$<br>ou $x^2=-1$<br>Pas de sol ds $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{C}$ Nb complexes<br> | On imagine un "objet" noté $i$ dont le carré est −1. (Euler)<br>On crée des objets du type $z=a+bi$ (a et b réels). | Toutes les équations algébriques ont des solutions (au moins une).<br>$P(z)=0$<br>↳ polynôme |

# CONSTRUCTION FORMELLE DU CORPS DES COMPLEXES

Pb : Construire un ensemble $\mathbb{C}$ tel que :

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
2) l'ADDITION dans $\mathbb{C}$ soit COMPATIBLE avec celle de $\mathbb{R}$
3) la MULTIPLICATION " " " " " " " "

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont notés à priori $z = a + bi$

avec
$a \in \mathbb{R}$ = Partie Réelle de $\mathbb{R}$ = $Ré[z]$
$b \in \mathbb{R}$ = Partie imaginaire de $\mathbb{R}$ = $Im[z]$
$i$ une racine carrée de $-1$ $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$

Pour répondre à l'exigence de compatibilité avec $\mathbb{R}$, on pose :

(1) $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i)$
$= (a + a') + (b + b')i$

. si $b = b' = 0$ $z$ et $z'$ sont réels $\Rightarrow z + z' = a + a'$
OK

(2) $zz' = (a + bi)(a' + b'i)$
$= aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2$
$= (aa' - bb') + (ab' + ba')i$ $(i^2 = -1)$

- si $b = b' = 0$ $zz' = aa'$ OK
- si $\left| \begin{array}{l} a = a' = 0 \\ b = b' = 1 \end{array} \right.$ $zz' = i.i = i^2 = -1$
$\Rightarrow z^2 = -1$ cette eq a bien pour sol $z = i$ et $z = -i$

[ Remarque : si on avait pris $zz' = aa' + bb'i$

On aurait avec $\left| \begin{array}{l} a = a' = 0 \\ b = b' = 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow z^2 = i$ et NON $z^2 = -1$
$i^2 = i \iff i^2 - i = 0$ $i(i-1) = 0$
$i = 0$ ou $i = 1$ IMPOSSIBLE !
Dans ce cas on n'aurait pas résolu l'equ. $z^2 = -1$ et $i$ ne serait pas une racine carrée de $-1$. ]

▷ L' ensemble $\mathbb{C}$ cherché est défini de la manière suivante :

1) On considère l' ensemble noté $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de tous les couples $(a;b)$ avec $a$ et $b$ réels.

2) Sur l' ensemble $\mathbb{R}^2$ on définit les 2 opérations

ADDITION : $(a;b) \oplus (a';b') = (a+a' \,;\, b+b')$

MULTIPLICATION : $(a;b) \otimes (a';b') = (aa'-bb' \,;\, ab'+ba')$

On démontre (admis) que ces 2 opérations sont :

(i) commutatives

(ii) associatives

(iii) avec élément neutre $\begin{cases} \text{pour } \oplus & (0;0) \\ \text{pour } \otimes & (1;0) \end{cases}$

(iv) avec élément
- symétrique de $(a;b)$ pour $\oplus$ $(-a;-b)$
- inverse de $(a;b)$ pour $\otimes$

Recherche de l' INVERSE de $(a;b)$ pour $\otimes$

$$(a;b) \otimes \underset{\text{INCONNU}}{(x;y)} = (1;0)$$

$$\Longleftrightarrow (ax-by \,;\, ay+bx) = (1;0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} bax - b^2y = b \\ abx + a^2y = 0 \end{cases}$$

$$(a^2+b^2)y = -b$$

$$\boxed{y = \frac{-b}{a^2+b^2}}$$ avec $a^2+b^2 \neq 0$ donc $(a;b) \neq (0;0)$

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

$$(a^2+b^2)x = a$$

$$\boxed{x = \frac{a}{a^2+b^2}}$$ avec $(a;b) \neq (0;0)$

Donc l'inverse de $(a;b)$ $(\neq (0;0))$ est le couple $\left(\frac{a}{a^2+b^2} \,;\, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

On admet de plus que la multiplication est DISTRIBUTIVE sur l' addition

On conclut en disant que $(\mathbb{R}^2 ; + ; *)$ a une STRUCTURE DE CORPS COMMUTATIF [de m̂ que $(\mathbb{R} ; + ; \cdot)$].

Remarque fondamentale

Dans le corps $(\mathbb{R}^2 ; + ; *)$ l'équation

$(x ; y) * (x ; y) = (-1 ; 0)$ (E)

admet deux solutions

(E) $\iff (x^2 - y^2 ; 2xy) = (-1 ; 0)$

$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ $x$ et $y$ RÉELS

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -1 \end{cases}$ impossible

$\iff$ On a donc $x = 0$ ; $y = 1$
ou $x = 0$ ; $y = -1$

La solution $(0;1)$ est désormais notée $i$
$(0;-1)$ " " " $-i$

Donc avec cette notation on a :

$\boxed{i^2 = (-1 ; 0)}$ → noté $-1$

$\Rightarrow i^2 = -1$

Donc on a résolu l'éq. $z^2 = -1$ avec $z = (x;y)$
dans $\mathbb{R}^2$ $-1 = (-1;0)$

**CONVENTIONS D'ÉCRITURE DES COUPLES $(a;b)$ de $\mathbb{R}^2$**

$(a;b) = (a;0) + (0;b)$

1ère convention : Tous les couples de la forme $(a;0)$ sont écrits $a$

2e : $(0;b) \to bi$

$\Rightarrow z = (a;b)$ s'écrit donc $a + bi$

8 SEPTEMBRE 2000

le sous-ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$ des couples de la forme $(a;0)$ avec $a \in \mathbb{R}$ correspond objectivement à l'ensemble $\mathbb{R}$.

De cette manière, on peut considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui est noté $\mathbb{C}$

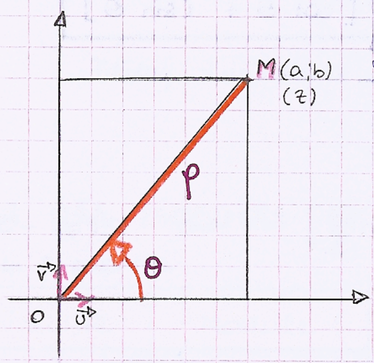
Conclusion $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ muni des opérations $(+)$ et $(*)$ répond à la question posée :

→ $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et un élément $i$ qui est une racine carrée de $-1$.

$(a;b) + (a';b') = (a+a' \; b+b') \iff (a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$

$(a;b) * (a';b') = (aa'-bb'; ab'-ba') \iff (a+bi) * (a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+ba')i$

## INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE




"Plan complexe" : représentation de $\mathbb{R}^2$

Repère $\|\perp\|$ ie $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ car } \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases}$

$\mathbb{C}$

$\boxed{z = a + bi}$

$M(a;b) \longleftrightarrow \vec{OM}\binom{a}{b}$

Pt du plan (image de $z$ dans le plan)

$z$ = AFFIXE du pt $M(a;b)$ ou du vecteur $\vec{OM}\binom{a}{b}$

## MODULE D'UN COMPLEXE z

Noté $|z|$ ou $\rho$ (Rô)

Par déf, le module vaut $\|\vec{OM}\|$

$\Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ (si $z = a + bi$)

## ARGUMENT D'UN COMPLEXE z

$\theta = (\vec{u} ; \vec{OM}) \quad (\text{mod. } 2\pi)$

Donc les relations entre $[\rho ; \theta]$ et $(a ; b)$ sont

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}}$$

$[\rho ; \theta]$ : COORDONNÉES POLAIRES de z

## FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NB COMPLEXE

$z = a + bi$ s'écrit $z = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta\, i$

avec $|z| = \rho$
$\text{Arg}\, z = \theta \ (2\pi)$

$$\boxed{z = \rho\,[\cos\theta + i\sin\theta]}$$

($\rho$ :) strictement positif

⚠ Soit $z = -3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= -3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow |z| \neq -3$ et $\arg z \neq \frac{\pi}{3}$

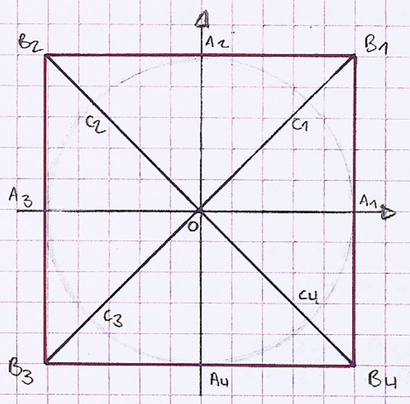
## FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE

<u>convention d'écriture</u> : Tout complexe de module $\rho$, d'argument $\theta$ s'écrit : $\boxed{\rho . e^{i\theta}}$

($\rho$ e puissance $i\theta$)

11 SEPTEMBRE 2000

## CAS PARTICULIERS

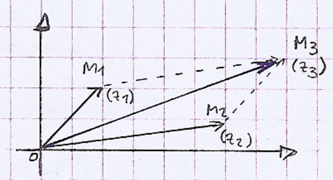



| Pt | $z$ | $\lvert z\rvert$ | Arg ($z$) |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $1$ | $1$ | $0$ |
| $A_2$ | $i$ | $1$ | $\pi/2$ |
| $A_3$ | $-1$ | $1$ | $\pi$ |
| $A_4$ | $-i$ | $1$ | $-\pi/2$ |
| $B_1$ | $1+i$ | $\sqrt{2}$ | $\pi/4$ |
| $B_2$ | $-1+i$ | $\sqrt{2}$ | $3\pi/4$ |
| $B_3$ | $-1-i$ | $\sqrt{2}$ | $-3\pi/4$ |
| $B_4$ | $1-i$ | $\sqrt{2}$ | $-\pi/4$ |
| $C_1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ | $1$ | $\pi/4$ |
| $C_2$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ | $1$ | $3\pi/4$ |
| $C_3$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ | $1$ | $-3\pi/4$ |
| $C_4$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ | $1$ | $-\pi/4$ |

## LOIS DES MODULES ET DES ARGUMENTS

| | Nombre | Module | Argument |
|---|---|---|---|
| | $z_1$ | $\rho_1 = \lvert z_1\rvert$ | $\theta_1 = \text{Arg}(z_1)$ |
| | $z_2$ | $\rho_2 = \lvert z_2\rvert$ | $\theta_2 = \text{Arg}(z_2)$ |
| 1 | $z_1 + z_2$ | $\cancel{\lvert z_1+z_2\rvert \neq \rho_1+\rho_2}$ | |
| 2 | $z_3 = z_1 \cdot z_2$ | $\rho_3 = \rho_1 \times \rho_2$ | $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \ (2\pi)$ |
| 3 | $z' = \frac{1}{z}$ | $\rho' = \frac{1}{\rho}$ | $\theta' = -\theta$ |
| 4 | $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$ | $\rho_3 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ | $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2 \ (2\pi)$ |
| 5 | $z' = \bar{z}$ conjugué de $z$ | $\lvert z'\rvert = \lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$ | $\theta' = \bar{\theta} = -\theta$ |

Soit $\begin{cases} z_1 = \rho_1 . e^{i\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 . e^{i\theta_2} \end{cases}$




$$\vec{OM_3} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$$

$$\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

<u>Démo du</u> ②  Soit $\left| \begin{array}{l} z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{array} \right.$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[ (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \right]$$
$$= \rho_1 \rho_2 \left[ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \right]$$
$$= \rho_1 \rho_2 \left[ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \right]$$

$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2$ et $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

CQFD

<u>Démo du</u> ③  Soit $z' = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho [\cos \theta + i \sin \theta]}$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)}$$
$$= \frac{1}{\rho} \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta - i^2 \sin^2 \theta}$$
$$= \frac{1}{\rho} \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$
$$= \frac{1}{\rho} (\cos \theta - i \sin \theta)$$
$$= \frac{1}{\rho} \left[ \cos (-\theta) + i \sin (-\theta) \right]$$

$\left| \dfrac{1}{z} \right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\operatorname{Arg}\left( \dfrac{1}{z} \right) = -\operatorname{Arg} z$  CQFD

<u>Remarque</u> : JUSTIFICATION DE LA NOTATION EXPONENTIELLE

Soit $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2} \end{array} \right|$ d'après ③ $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Donc on a la relation $\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

( ⚠ voir règles de puissance en 4e classe $a^m . a^n = a^{m+n}$ )

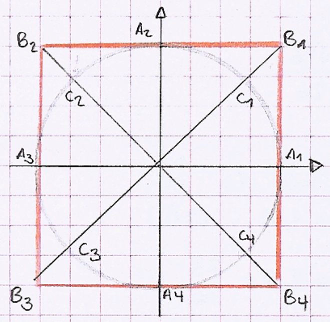
<u>De même</u>  Soit $z = \rho e^{i\theta}$

Alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$ ( d'après la démo ③ )

$\Rightarrow$ On a la relation $\dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

# EXOS SUR LA NOTATION EXPONENTIELLE

1




$z_{A_1} = 1 = 1e^{i(0)} = 1.e^{i(2\pi)} = \boxed{e^{2i\pi}}$

$z_{A_2} = i = 1e^{i(\frac{\pi}{2})} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$z_{A_3} = -1 = 1e^{i\pi} = \boxed{e^{i\pi}} = e^{-i\pi}$

$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$

$z_{A_4} = -i = 1e^{i(-\pi/2)} = \boxed{e^{-i\pi/2}}$

CONJUGUÉS

$z_{B_1} = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ $\qquad$ $z_{B_2} = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$

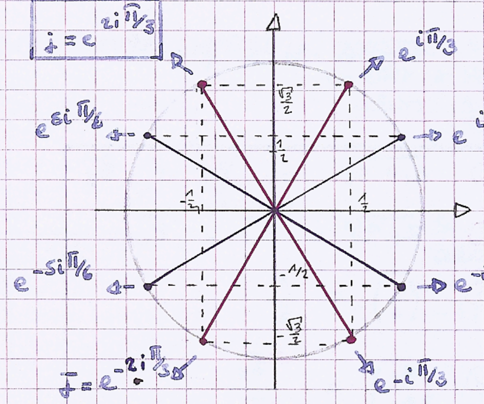
$z_{B_4} = \overline{z_{B_1}} = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$ $\qquad$ $z_{B_3} = \sqrt{2}\, e^{-3i\pi/4}$

$z_{C_1} = e^{i\pi/4}$ $\qquad$ $z_{C_3} = e^{-3i\pi/4} = \overline{z_{C_2}}$

$z_{C_2} = e^{3i\pi/4}$ $\qquad$ $z_{C_4} = e^{-i\pi/4} = \overline{z_{C_1}}$

2

$\boxed{j = e^{2i\pi/3}}$




$e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

$e^{-i\pi/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 Calculer le module et l'argument des nb suivants :

- $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{2e^{i\pi/6}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{i\pi/6} \times e^{i\pi/3} = e^{i(\pi/6+\pi/3)} = e^{i\pi/2} = i$

$\Rightarrow \quad |z| = 1 \qquad \mathrm{Arg}(z) = \pi/2$

autre méthode : $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}} \times \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+3i}{4} = \dfrac{4i}{4} = i$

- $z = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{2} = \frac{1+5i}{2}$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$ $\sin\theta = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$

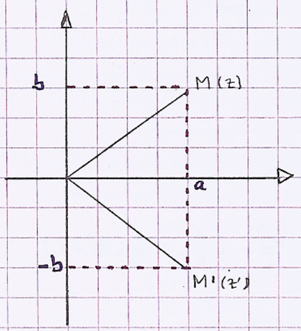
$\Leftrightarrow$ $\theta \simeq 1{,}37$ ou $-1{,}37$

mais $\sin\theta > 0 \Rightarrow \theta = 1{,}37 \quad (2\pi)$

$1{,}37 = \frac{\pi}{q} \Leftrightarrow q = \frac{\pi}{1{,}37} = 2{,}3 = \frac{23}{10}$

$1{,}37 \simeq \frac{10}{23}\pi$

## LOIS DES CONJUGUÉS




$z = a + bi = \rho . e^{i\theta}$

$\bar{z}$ est le conjugué de $z$.

$\bar{z} = a - bi = \rho . e^{-i\theta}$

| | |
|---|---|
| 1 | $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ |
| 2 | $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ |
| 3 | $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ |
| 4 | $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ |
| 5 | $\bar{\bar{z}} = z$ |
| 6 | $\frac{z + \bar{z}}{2} = a = Ré\,[z]$ |
| 7 | $\frac{z - \bar{z}}{2} = b = Im\,[z]$ |
| 8 | $z . \bar{z} = \lvert z\rvert^2$ |

Théorèmes corollaires

| |
|---|
| • $z = Re(z) \Leftrightarrow z = \bar{z}$ |
| • $z = Im(z) \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ |
| • $\lvert z \rvert = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ |

" Un nb est imaginaire pur ssi son conjugué est son opposé "

Remarque (HP) : L'ensemble des Nb complexes de module 1 est un GROUPE commutatif pour la ×ion.

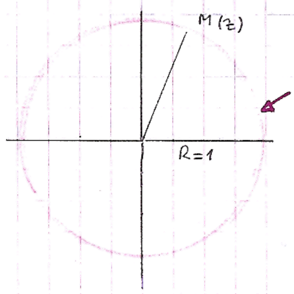
Soit $\underset{(\text{unité})}{\mathbb{U}} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \lvert z \rvert = 1 \}$ $\left| \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix} \right] \in \mathbb{U}$

(i) ASSOCIATIVITÉ $(z_1 . z_2) . z_3 = z_1 (z_2 . z_3)$
Par extension de l'associativité dans $\mathbb{C}$

(ii) COMMUTATIVITÉ idem $z_2 z_1 = z_1 z_2$

(iii) ÉLÉMENT NEUTRE $z = 1 \in \mathbb{U}$

(iv) ÉLÉMENT INVERSE soit $z \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$
en effet si $\lvert z \rvert = 1$
alors $\left| \frac{1}{z} \right| = \lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert = 1$




$\mathbb{U}$ (groupe unité)

NB : Si $\lvert z_1 \rvert = \lvert z_2 \rvert = 1$
alors $\lvert z_1 + z_2 \rvert \neq 1$ $(z_1 + z_2) \notin \mathbb{U}$

$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$ mais $\text{Arg}(-z) = \text{Arg}\, z + \pi \; (2\pi)$

# INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES OPÉRATIONS DANS $\mathbb{C}$

Rappel :

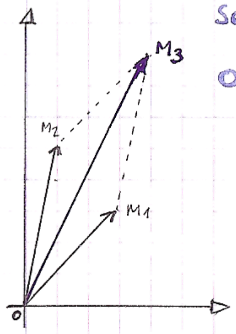
$\mathbb{C}$
$z = a + bi$ (Affixe de M)

Bij. Bij.

Points du plan $\xleftrightarrow{\text{Bij.}}$ Vecteurs du plan
M (a ; b) (image de z) $\vec{OM}\binom{a}{b}$ (image de z)

① Somme

Soit $\begin{cases} z_1 \longleftrightarrow M_1 \longleftrightarrow \vec{OM_1} \\ z_2 \longleftrightarrow M_2 \longleftrightarrow \vec{OM_2} \end{cases}$




Soit $z_3 = z_1 + z_2 \longleftrightarrow M_3 \longleftrightarrow \vec{OM_3}$

On a $\boxed{\vec{OM_3} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{z_3 = z_1 + z_2}$

$\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$

COROLLAIRE : Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe $a$
Soit $t_{\vec{u}}$ la TRANSLATION de vecteur $\vec{u}$

$t_{\vec{u}} \begin{cases} P \longrightarrow P \\ M \longmapsto M' \end{cases}$ | tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$

$\Updownarrow$ ?

$F : \begin{cases} z \longmapsto z' \\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \end{cases}$ $z' = z + a$

DÉMO $\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{u}$

$\Rightarrow$ " Ajouter un nb complexe fixe $a$ à un nb $z$ qconque revient à effectuer sur l'image $M$ de $z$ une translation de vecteur $\vec{u}$ (image de $a$). "

Pour abréger on dit que l'application $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + a \end{cases}$ est une "TRANSLATION"

② Multiplication

1. Produit par un réel

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \lambda z = z' \end{cases}$ ?

$h_{[O;\lambda]} : \begin{cases} M \longmapsto M' \\ P \longrightarrow P \end{cases}$

$\vec{OM'} = \lambda \vec{OM}$
HOMOTHÉTIE

CQFD

démo : soit $\begin{vmatrix} z = x + yi \\ z' = \lambda x + \lambda y i \end{vmatrix} \Leftrightarrow M'(\lambda x ; \lambda y) \Leftrightarrow \vec{OM'}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ " Multiplier un nb complexe $z$ qconque par un réel fixe $\lambda$ revient à effectuer sur l'image $M$ de $z$ une HOMOTHÉTIE de | centre O, rapport $\lambda$ "

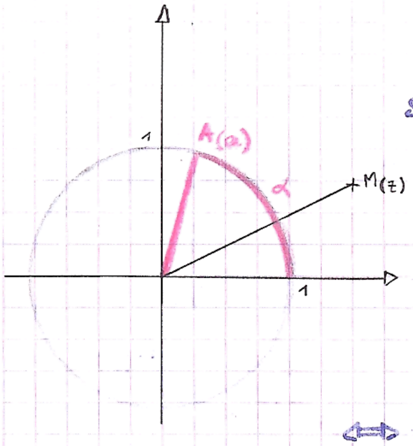
Résumé : $z \longmapsto \lambda z$ est dite HOMOTHÉTIE

## 2 - Produit par un complexe de module 1

Soit $a \in \mathbb{U}$ $(|a| = 1)$

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto az = z' \end{cases}$$

$$? \begin{cases} M \longmapsto M' \\ P \longrightarrow P \end{cases}$$




Soit $\alpha = \mathrm{Arg}(a)$

$\Leftrightarrow \quad a = e^{i\alpha}$

On a $|z'| = |za| = |z| \times |a| = |z|$

donc $\|\vec{OM}\| = \|\vec{OM'}\|$ (1)

de plus $\mathrm{Arg}(z') = \mathrm{Arg}(az) = \mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(z)$

$\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{OM'}) = (\vec{u}; \vec{OA}) + (\vec{u}; \vec{OM})$

$\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{OM'}) - (\vec{u}; \vec{OM}) = (\vec{u}; \vec{OA})$

$\Leftrightarrow (\vec{OM}; \vec{OM'}) = \alpha \quad (2\pi)$ (2)

(1) et (2) montrent que $M' = \mathrm{Rot}_{[O;\alpha]}(M)$

$\Rightarrow$ "Multiplier un nb complexe $z$ qcque par un complexe fixe $a$ de module 1 revient à effectuer une ROTATION de | centre O, angle $\alpha = \arg(a)$ sur l'image de $z$."

## 3 - Produit par un complexe qcque

Soit $a \in \mathbb{C}$ $\quad a = r.e^{i\alpha}$ $(\neq 0)$

$r = |a| \neq 0 \qquad \alpha = \mathrm{Arg}(a)$

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto az = z' = r(e^{i\alpha} z) = r.z_1 \end{cases}$$

$$? \begin{cases} M \longmapsto M' \\ P \longrightarrow P \end{cases}$$

décomposition : $z \xmapsto[\text{ROTATO}]{\text{Cf 2.2}} z_1 = e^{i\alpha} z \xmapsto[\text{HOMO}_{[O;r]}]{\text{Cf 2.1}} z' = r z_1$

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{\text{Hom} \circ \text{Rot}}$

= SIMILITUDE directe de | centre O, angle $\alpha$, rapport $r$

__NB__ : l'opération est commutative

$S = \mathrm{Hom} \circ \mathrm{Rot} = \mathrm{Rot} \circ \mathrm{Hom}$

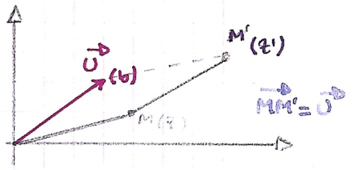
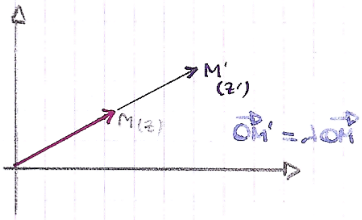
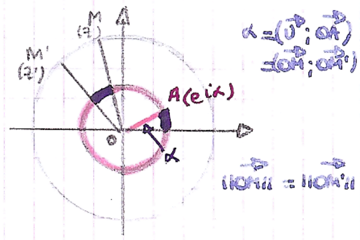
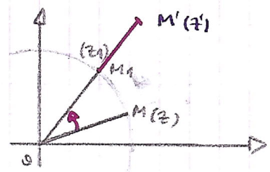
car $z' = az = (re^{i\alpha}) z = r(e^{i\alpha} z) = e^{i\alpha}(rz)$

⇒ " Multiplier un nb complexe quelconque $z$ par un complexe fixe $a$ revient à effectuer une similitude sur le pt $M$ image de $z$
de centre $O$
angle $\alpha = \mathrm{Arg}\,(a)$
rapport $r = |a| > 0$

18 SEPTEMBRE 2000

## RÉSUMÉ / INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $z \longmapsto az + b$

$a$ et $b$ COMPLEXES

| Type | Transformat° géométrique | Figure |
|---|---|---|
| $a = 1 \quad b = 0$<br>$z \longmapsto \underbrace{z + b}_{z'}$ | TRANSLATION<br>de vecteur $\vec{u}$ image de $b$ |  |
| $a = \lambda \in \mathbb{R}$<br>$b = 0$<br>$z \longmapsto \lambda z = z'$ | HOMOTHÉTIE<br>centre $O$, rapport $\lambda$ |  |
| $a = e^{i\alpha}$ $(\|a\|=1)$<br>$b = 0$<br>$z \longmapsto e^{i\alpha} z = z'$ | ROTATION<br>centre $O$, angle $\alpha$ |  |
| $a = re^{i\alpha}$<br>$b = 0$<br>$z \longmapsto az$ | SIMILITUDE directe<br>(composée homot $(O; r)$<br>rotat° $(O; \alpha)$ ) |  |
| CAS GÉNÉRAL<br>$a = re^{i\alpha}$<br>$b \neq 0$<br>$z \longmapsto az + b = z'$ | Soit $\Omega$ le PT FIXE d'affixe $\omega$ tel que $\omega = a\omega + b$<br>$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1)$<br>On a alors $\underbrace{z' - \omega}_{Z'} = \underbrace{a\,(z - \omega)}_{a\,Z}$ $\quad (\vec{\Omega M}; \vec{\Omega M'}) = \alpha$<br>HOMOTHÉTIE $(\Omega; r) \Leftrightarrow \alpha = 0 \; (\pi)$<br>ROTATION $(\Omega; \alpha) \Leftrightarrow r = 1$<br>SIMILITUDE centre $\omega$, angle $\alpha$, rapport $r$ sinon | |