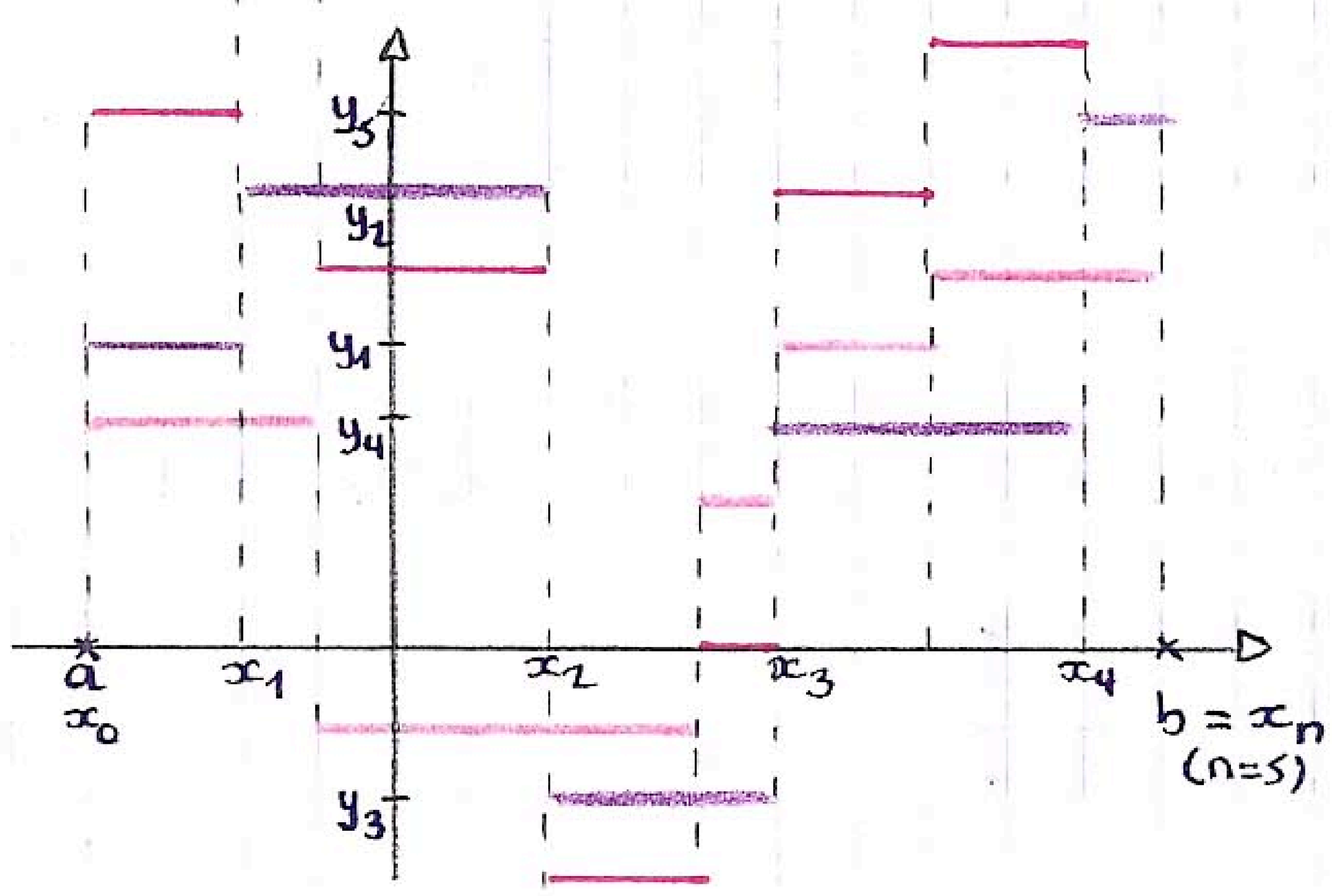
CHAP. 7

INTÉGRALE DÉFINIE

LUNDI 08 JANVIER 2001

FONCTION EN ESCALIER



On suppose donnée une suite finie (x_n) de nombres dans l'intervalle $[a;b]$.

$(x_0 ; x_1 ; \ldots ; x_n)$: une SUBDIVISION de $[a;b]$

$x_0 = a \qquad x_n = b$

$f_2 + f_1 = f_3$

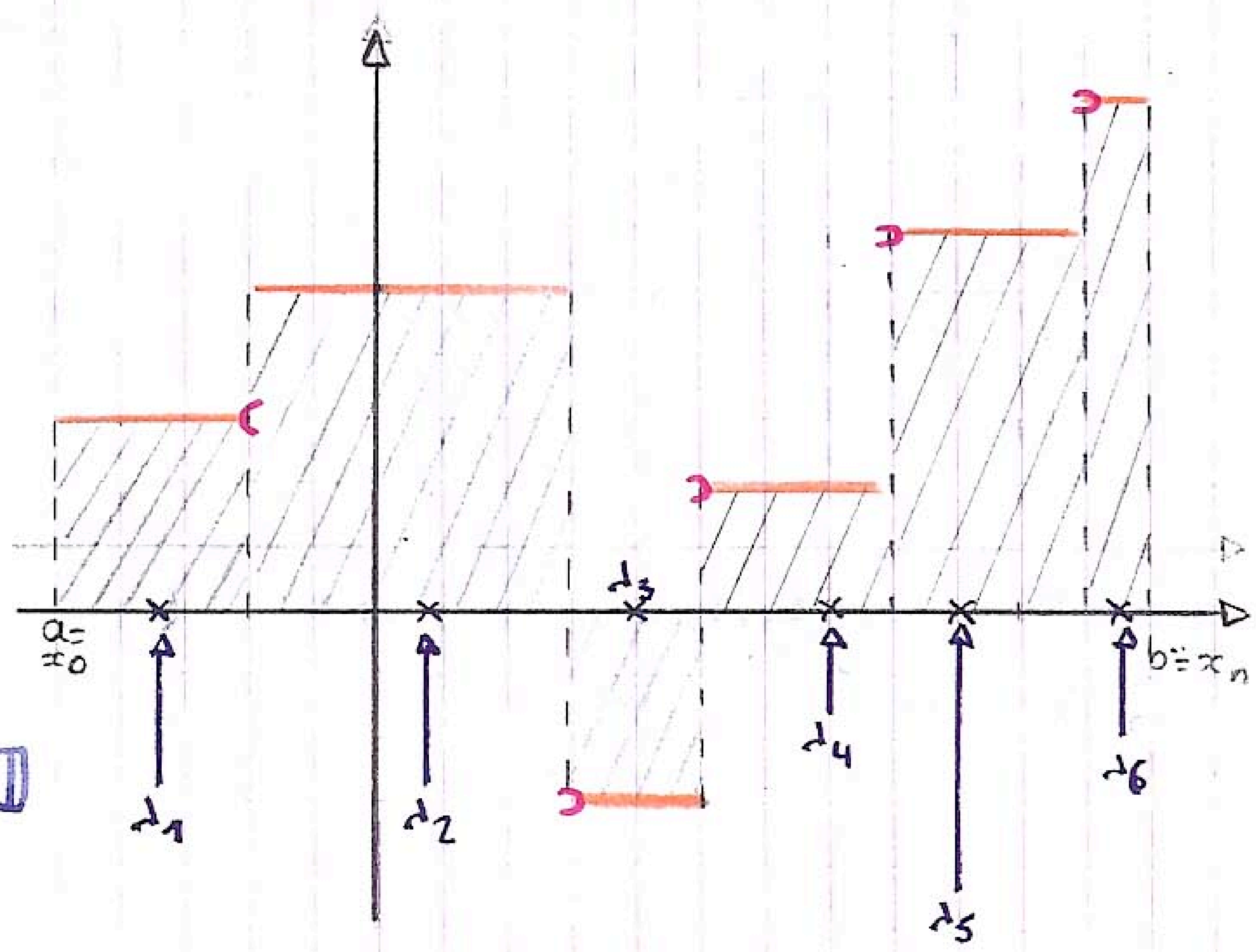
<u>Remarque</u> : Pour toute fonction en escalier sur $[a;b]$, on peut remplacer la subdivision initiale par une subdivision "plus fine".

<u>En particulier</u>, pour faire la somme de 2 fonctions en escalier sur $[a;b]$, on utilise la subdivision obtenue par réunion des 2 subdivisions initiales.

INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER SUR $[a;b]$

<u>Définition</u> : le NOMBRE RÉEL =

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\lambda_i)}_{\text{aire algébrique d'un rectangle élémentaire}}$$



$\lambda_i \in]x_{i-1} ; x_i[$ pour $i \in [\![0 ; n-1]\!]$

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER

Soit $\underset{\text{APPLICATO}}{\mathcal{I}} \begin{cases} \mathcal{E}[a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(\lambda_i)}_{\mathcal{I}(f)} \end{cases}$

① INTÉGRALE de la SOMME = Somme des INTÉGRALES

$$\boxed{\mathcal{I}_{(f_1+f_2)} = \mathcal{I}_{(f_1)} + \mathcal{I}_{(f_2)}}$$

② INTÉGRALE du produit par une constante
= PRODUIT de l'intégrale par une constante

$$\boxed{\mathcal{I}_{(\lambda f)} = \lambda . \mathcal{I}_{(f)}}$$

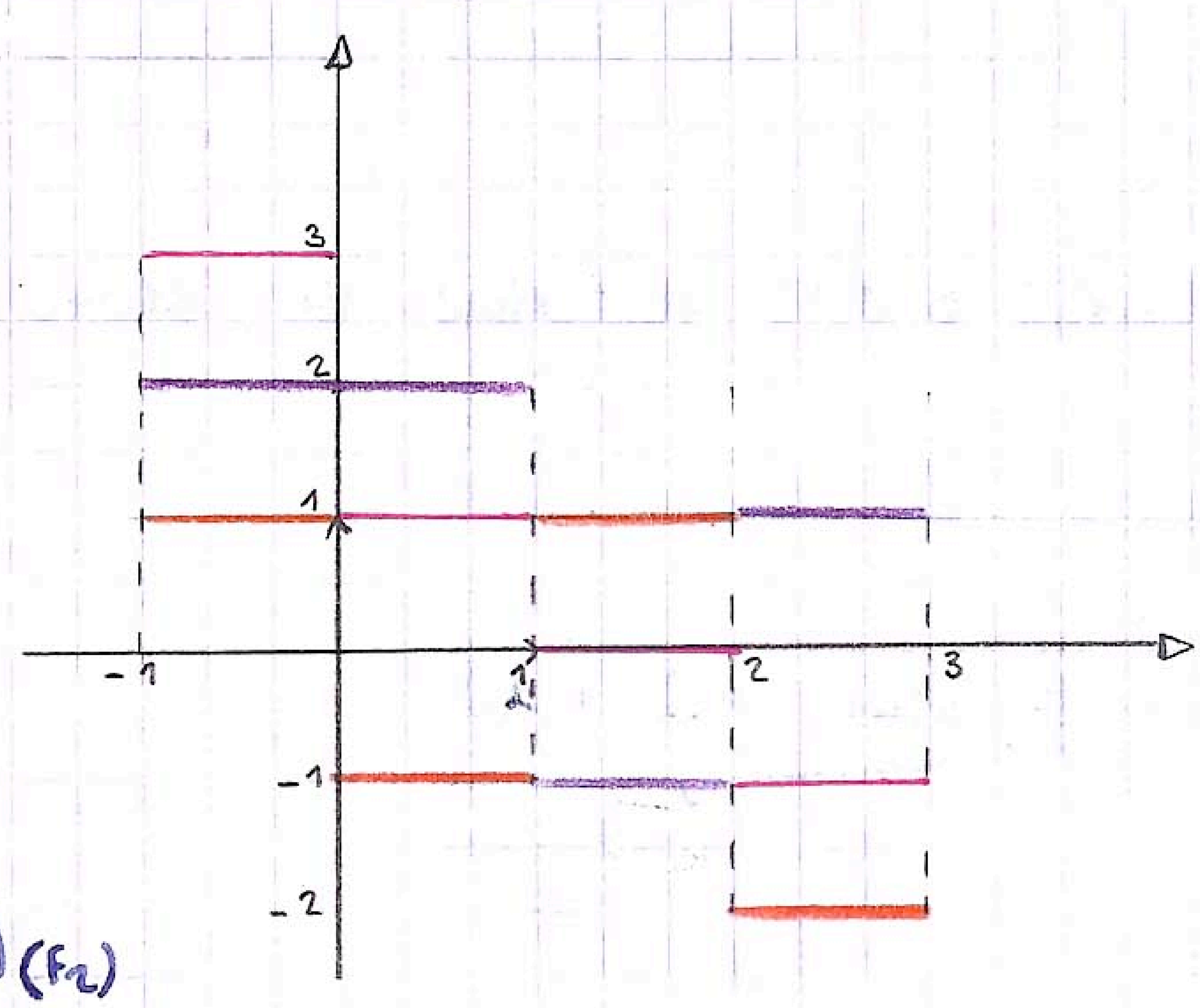
① et ② font de $\mathcal{I}$ une application LINÉAIRE de $\mathcal{E}_{[a;b]}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple numérique

$\mathcal{I}_{(f_1)} = 4$

$\mathcal{I}_{(f_2)} = -1$

$\mathcal{I}_{(f_1+f_2)} = 3$



$\Rightarrow \mathcal{I}_{(f_1+f_2)} = \mathcal{I}_{(f_1)} + \mathcal{I}_{(f_2)}$

MARDI 09 JANVIER 2001

③ Relation de Chasles pour les intégrales

qqsoit $c \in [a;b]$

$$\boxed{\mathcal{J}_{[a;b]}(f) = \mathcal{J}_{[a;c]}(f) + \mathcal{J}_{[c;b]}(f)}$$

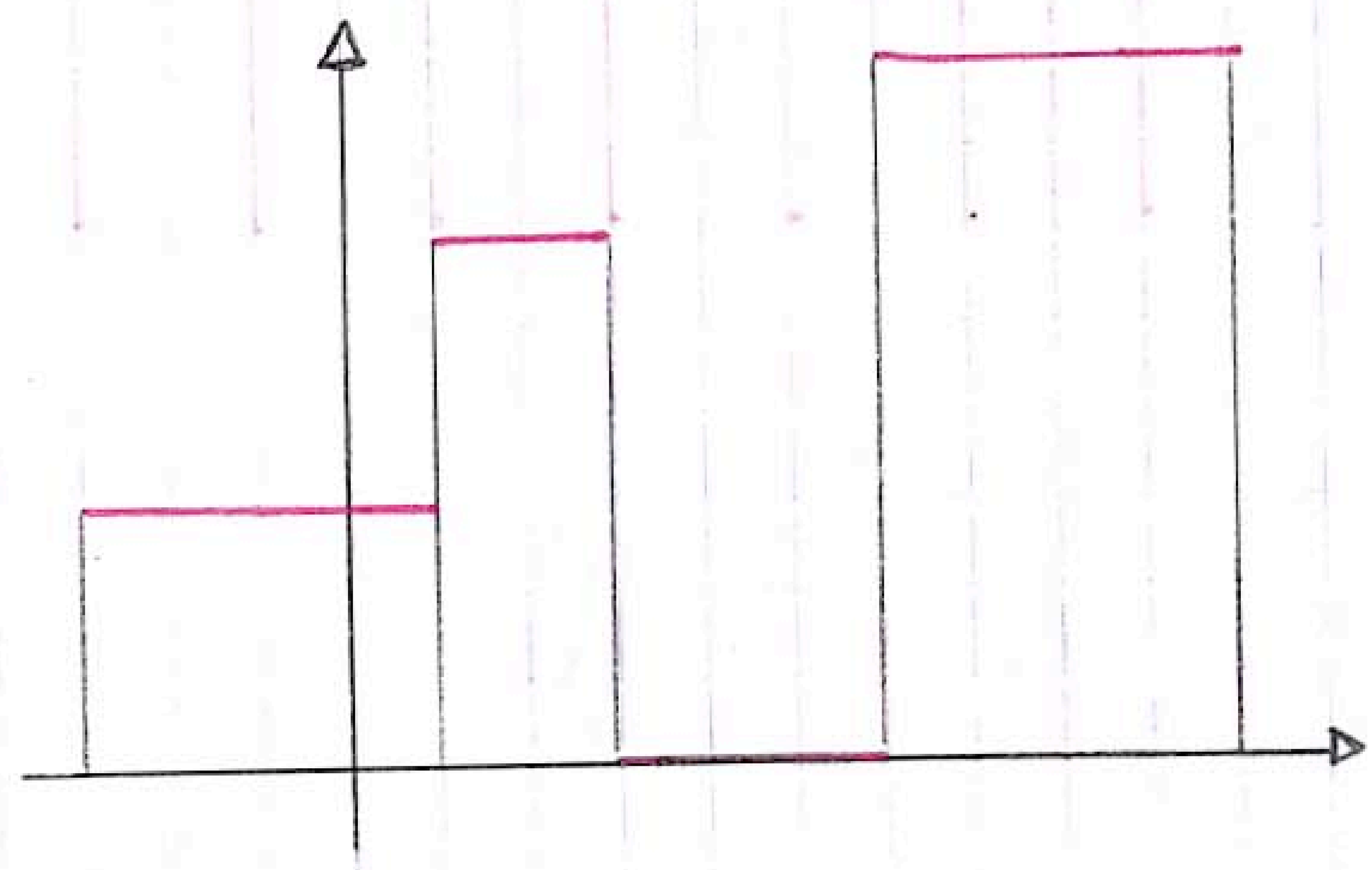
• $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

④ Relation d' ORDRE pour les intégrales

$\boxed{\text{Si}}$ $\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{E}_{[a;b]} \\ \text{et} \\ f \overset{(*)}{\geqslant} 0 \text{ sur } [a;b] \end{array} \right.$

$\Downarrow$

(*) : NON PARTOUT NULLE



$\boxed{\text{Alors}}$ $\mathcal{J}_{[a;b]}(f) > 0$

④bis $\boxed{\text{Si}}$ $\left| \begin{array}{l} f_1 \in \mathcal{E}_{[a;b]} \text{ et } f_2 \in \mathcal{E}_{[a;b]} \\ \text{et} \\ f_1(x) \overset{(*)}{\leq} f_2(x) \text{ sur } [a;b] \end{array} \right.$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Alors}}$ $\mathcal{J}_{[a;b]}(f_1) < \mathcal{J}_{[a;b]}(f_2)$

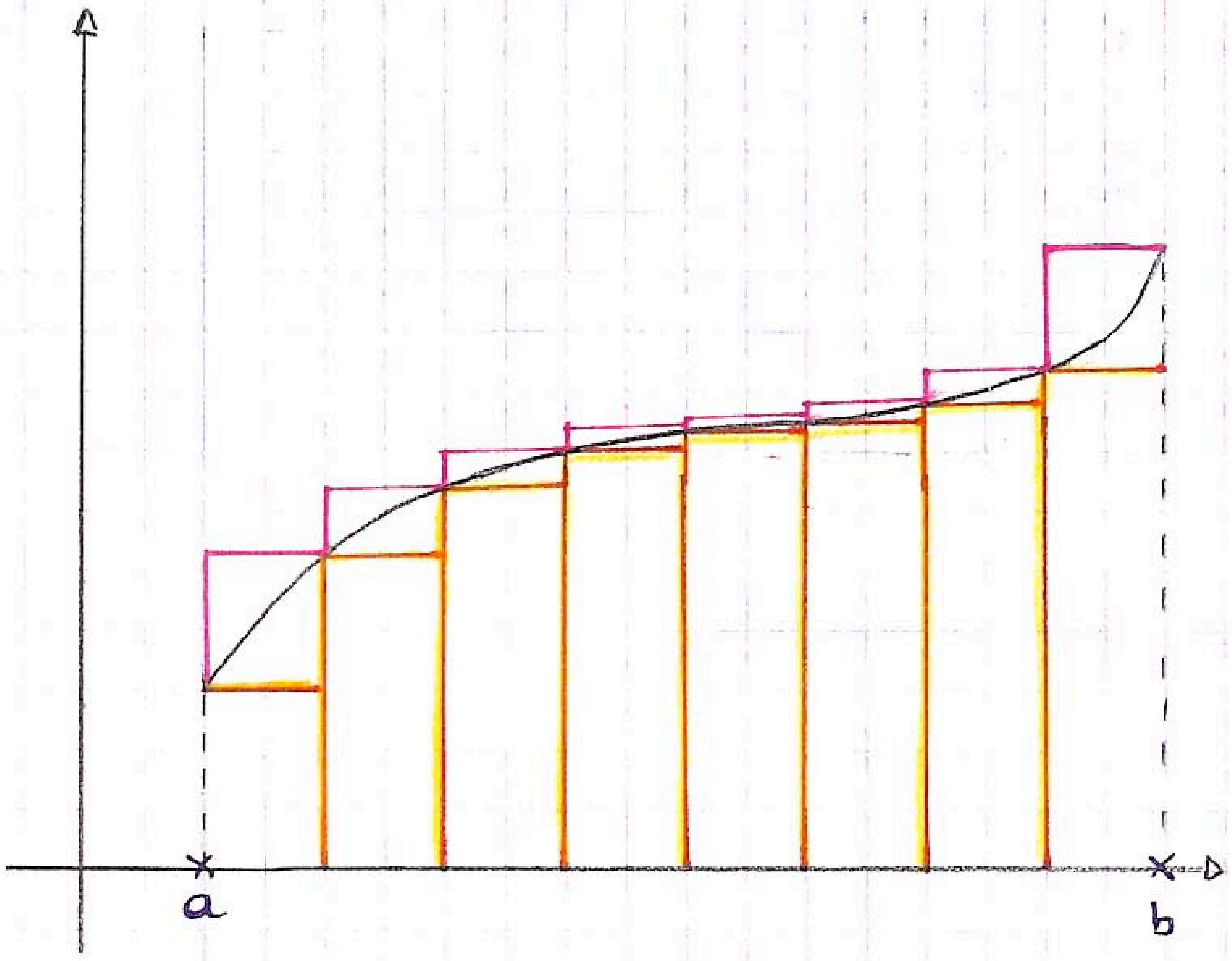
" Les intégrales sont dans le même ordre que les fonctions. "

Démo : $f_1 \leq f_2 \iff f_2 - f_1 \geqslant 0$

$\Rightarrow \mathcal{J}(f_2 - f_1) > 0$

$\Rightarrow \mathcal{J}(f_2) - \mathcal{J}(f_1) > 0$

GÉNÉRALISATION : INTÉGRALE d'une fonction | DÉRIVABLE sur [a;b] quelconque



• Soit φ_n en escalier sur [a;b] (MINORANTE de f pour une subdivision quelconque)

$$\sigma_n = (\underset{a}{x_0} ; x_1 ; \dots ; \underset{b}{x_n})$$

• Soit ψ_n en escalier sur [a;b] (MAJORANTE de f pour une subdivision quelconque)

→ On considère les 2 suites numériques suivantes :

$$I_n = \int_{[a;b]} (\varphi_n) \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_{[a;b]} (\psi_n)$$

Si f ↗ sur [a;b], alors $I_n < J_n$.

De plus, (I_n) ↗ et (J_n) ↘.

On suppose de plus que $(J_n - I_n) \longrightarrow 0$ et donc que (I_n) et (J_n) ont une limite commune I.

$$I_n \to I \qquad J_n \to I$$

Donc $$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i} f(x_i)$$

= somme intégrale des aires des rectangles infinitésimaux

BORNE SUP de l'INTERVALLE.

Notée : $\int_a^b f(x)\,dx$ ou $\int_a^b f$

BORNE INF.

Δx est PETIT.

Somme INFINIE d'INFINIMENT PETITS (Resultat FINI)

Valeur courante de la hauteur d'un rectangle INFINITESIMAL

Cours de Term.S • jml@ecole-alsacienne.org • [*Ch. Rachline*] • 2000-2001

MERCREDI 10 JANVIER 2001

Théorème fondamental de l'analyse

(théorème des petits cailloux)

Si f admet une primitive F sur $[a;b]$

Alors $\boxed{\int_a^b f(x).\,dx = F(b) - F(a)}$

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

Soit $D_{[a;b]}$ l'ensemble des fonctions DÉRIVABLES sur $[a;b]$
$\Downarrow$
INTÉGRABLES

Soit $\mathcal{I}$ l'application $\begin{cases} D_{[a;b]} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_a^b f(x).\,dx \end{cases}$

① $\mathcal{I}(f+g) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)$

On écrit en pratique : (admis) $\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)] = \int_a^b f(x).\,dx + \int_a^b g(x).\,dx}$

② $\mathcal{I}(\lambda f) = \lambda.\,\mathcal{I}(f)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé

" intégrale du produit d'une fonction par un scalaire
= produit de l'intégrale par un scalaire "

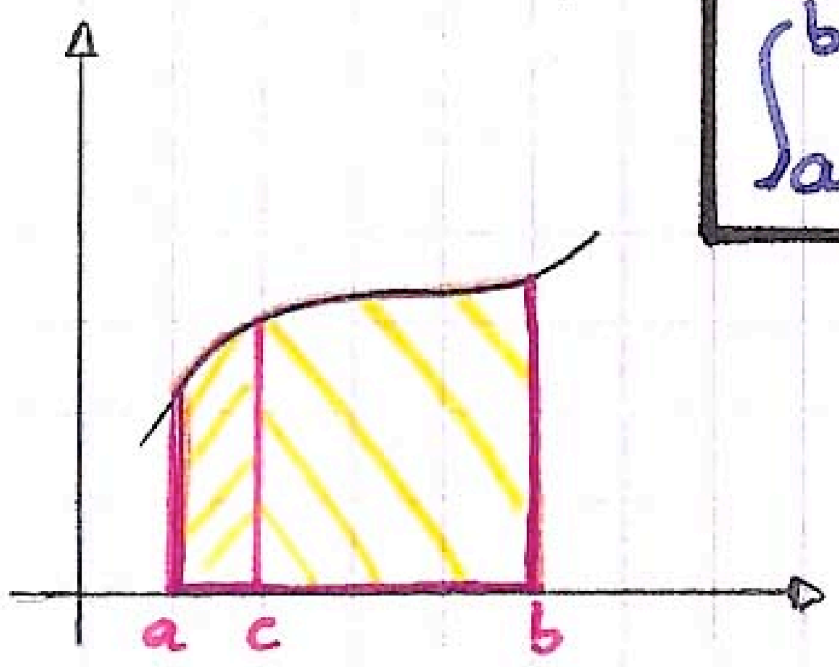
On écrit : $\boxed{\int_a^b [\lambda.\,f(x)].\,dx = \lambda.\int_a^b f(x).\,dx}$

Remarque : ① et ② $\rightarrow$ l'application "INTÉGRATION" est linéaire.

ie : – " image de la somme = somme des images "
– " image du produit par un scalaire
= produit du scalaire par l'image "

③ Relation de Chasles

qqsoit $c \in [a;b]$, on a :



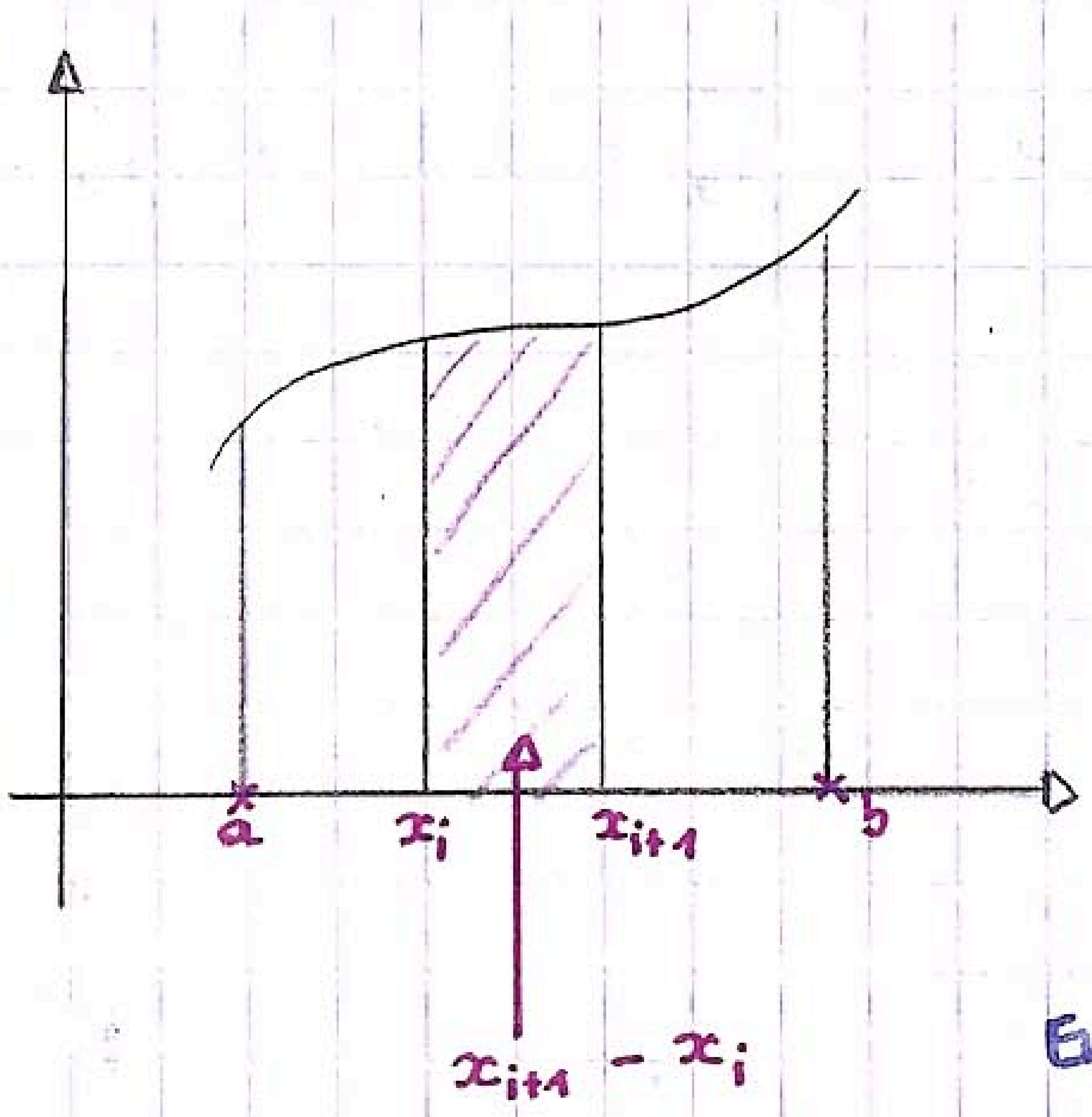
$$\boxed{\int_a^b f(x).\,dx = \int_a^c f(x).\,dx + \int_c^b f(x).\,dx}$$

④ Relation d'ordre sur les intégrales

$\boxed{\text{Si}}$ $\left| \begin{array}{l} f(x) \overset{(*)}{\geqslant} 0 \text{ sur } [a;b] \\ \text{et} \\ f \text{ DÉRIVABLE} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Alors}}$ $\boxed{\int_a^b f(x).\,dx > 0}$

(*) : NON PARTOUT NULLE

$\Rightarrow$ application fondamentale : CALCUL D'AIRES



$\boxed{\text{Si}}$ $\left| \begin{array}{l} f(x) \geqslant 0 \text{ sur } [a;b] \\ \text{et} \\ f \text{ DÉRIVABLE} \end{array} \right.$

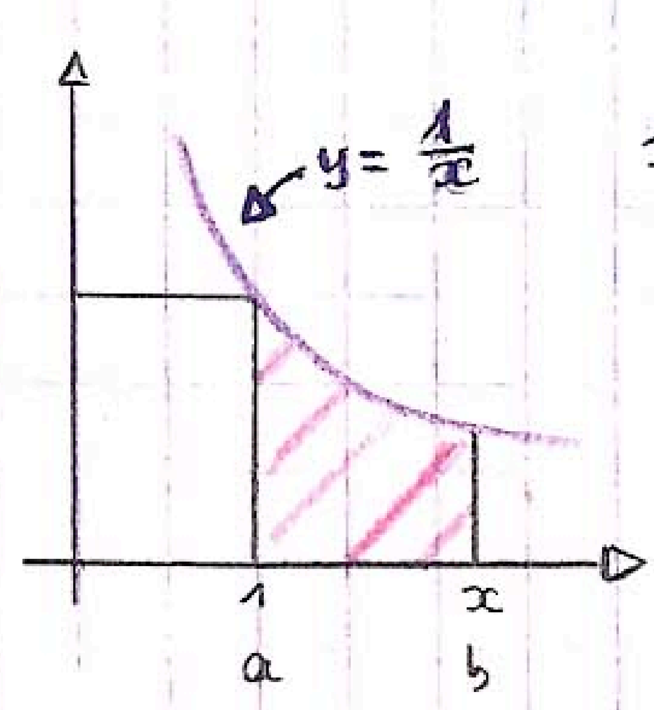
$\Downarrow$

$\boxed{\text{Alors}}$ $\int_a^b f(x).\,dx$ représente la mesure de l'aire du domaine du plan défini par : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant f(x) \end{cases}$

En effet, par définition :

$$\int_a^b f(x).\,dx = \lim_{n \to +\infty} I_n$$
$$= \lim \Big[\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(x_{i+1} - x_i).f(x_i)}_{\text{aire élémentaire}} \Big]$$

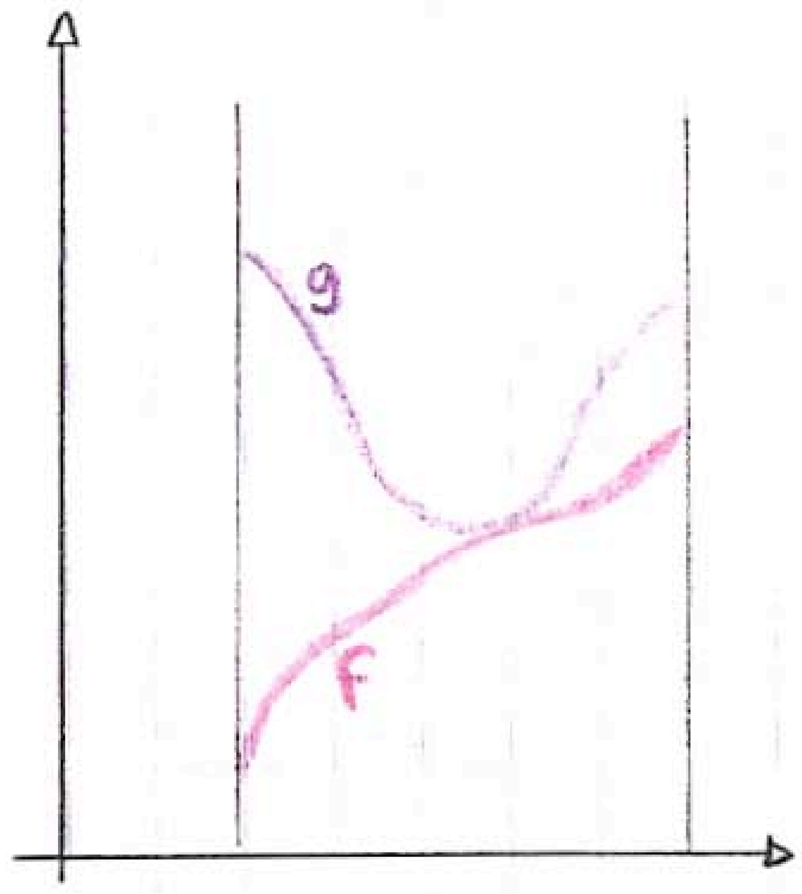
Rappel :



$x > 0$

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{x}.\,dx = \ln b - \ln a}$$

4bis



Si | $f(x) \overset{(*)}{\leq} g(x)$
(*) : NON PARTOUT ÉGALES
(et f et g dérivables sur [a;b])

$\Downarrow$

Alors $\boxed{\int_a^b f(x).dx \underset{\text{(STRICT)}}{<} \int_a^b g(x).dx}$

"L'intégrale conserve l'ordre."

Remarques (3bis) :

- $\boxed{\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx}$

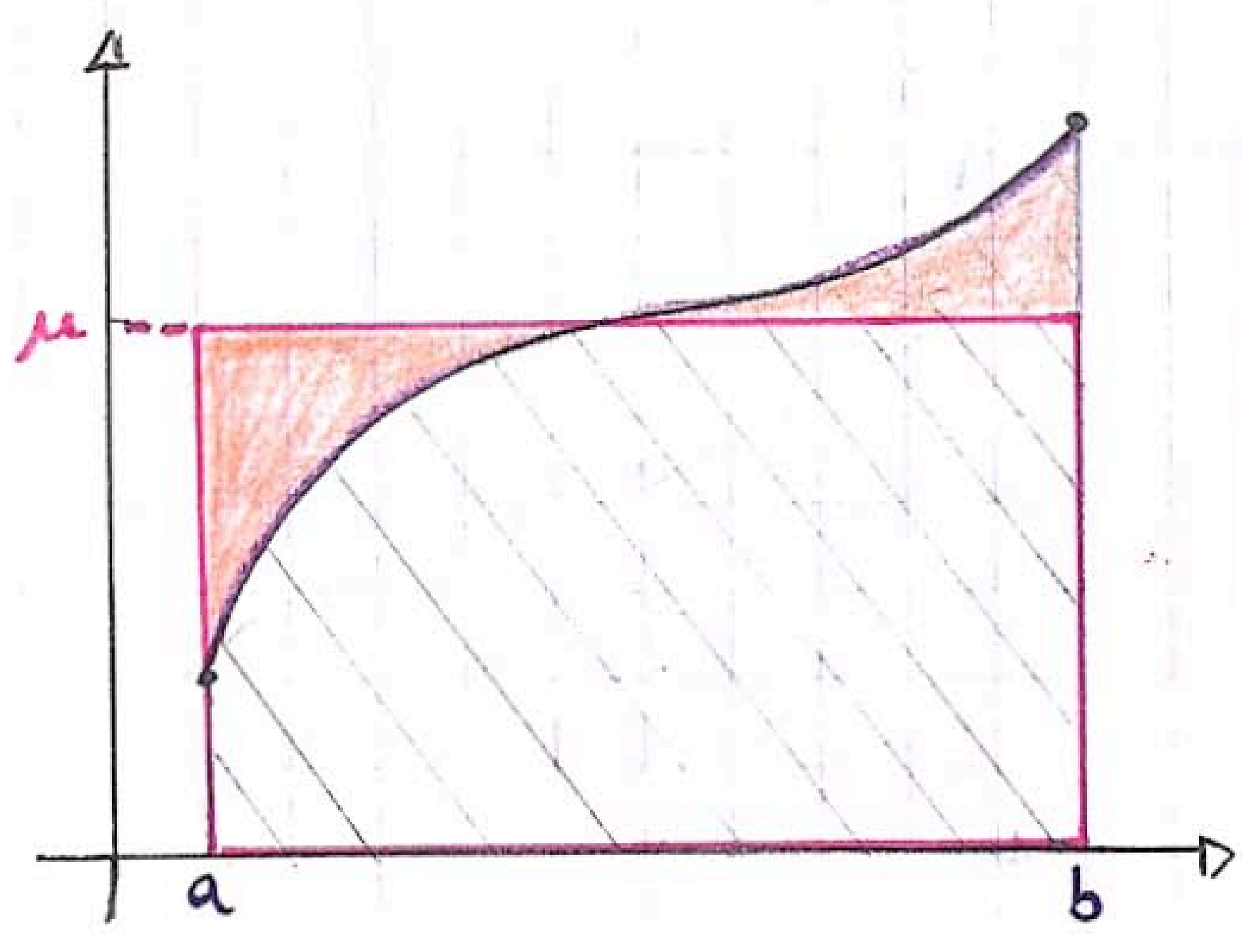
conséquence de la relat° de Chasles

En effet : $\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a = 0$

- $\boxed{\int_a^b -f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx}$

(produit par $\lambda = -1$)

5 Théorème de la moyenne



Si f est | dérivable sur [a;b]
donc intégrable sur [a;b]

$\Downarrow$

Alors il existe un nombre μ

tel que $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x).dx}$

μ appelé VALEUR MOYENNE de f sur [a;b]

Aire du rectangle = aire du domaine plan défini par f sur [a;b]

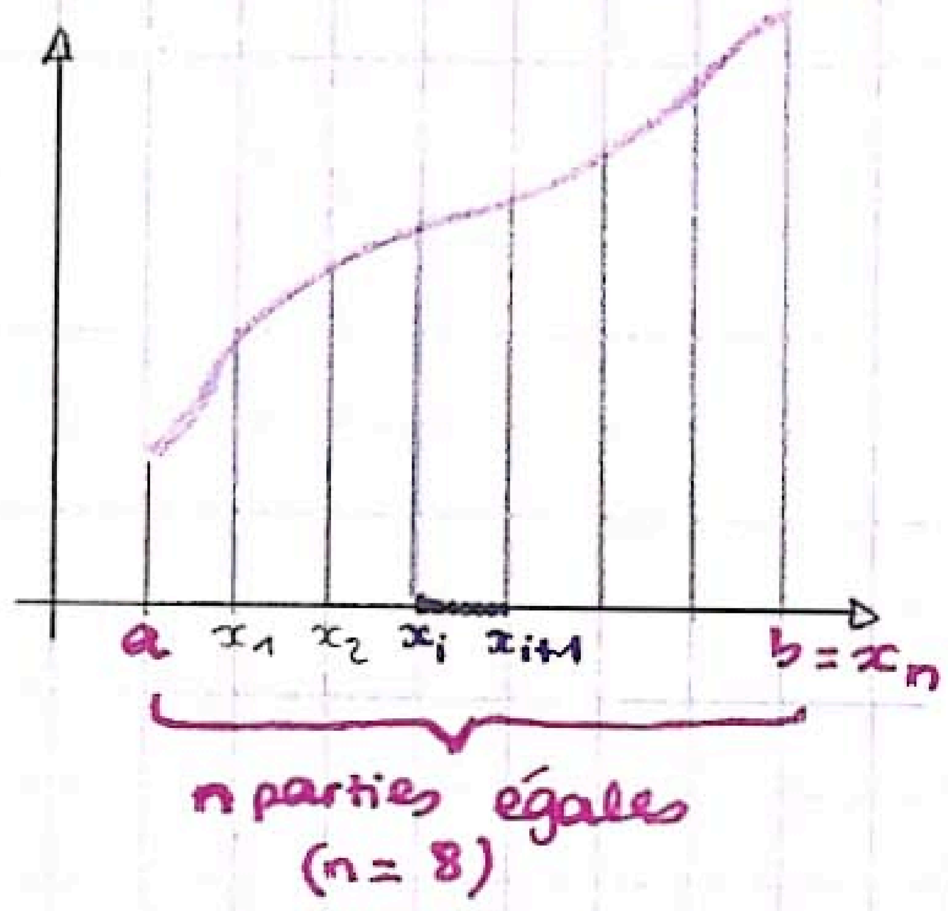
Or | aire du rectangle $= \mu \times (b-a)$
aire du domaine $= \int_a^b f(x).dx$

$\Rightarrow$ d'où la formule :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x).dx$$

Justification du mot "MOYENNE" de f

<u>Rappel</u> :



$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

En particulier on peut considérer une SUBDIVISION RÉGULIÈRE $x_0 ; x_1 ; \dots ; x_n$ de $[a;b]$

c-a-d telle que $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$

Dans ces conditions,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i).f(x_i) = \left(\frac{b-a}{n}\right). \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i).f(x_i) = (b-a). \boxed{\frac{f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})}{n}}$$

noté μ_n

μ_n = moyenne arithmétique des n valeurs de f sur $[a;b]$

<u>Donc</u>

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{n \to +\infty} (b-a).\mu_n$$

$$\int_a^b f(x).dx = (b-a) \times \lim_{n \to +\infty} \mu_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mu_n = \frac{1}{b-a} . \int_a^b f(x).dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \lim_{n \to +\infty} \mu_n}$$

ie : " la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ = la limite des moyennes arithmétiques de valeurs de f sur $[a;b]$ "

⑥ Théorème fondamental

Soit f dérivable (donc intégrable) sur $[a;b]$

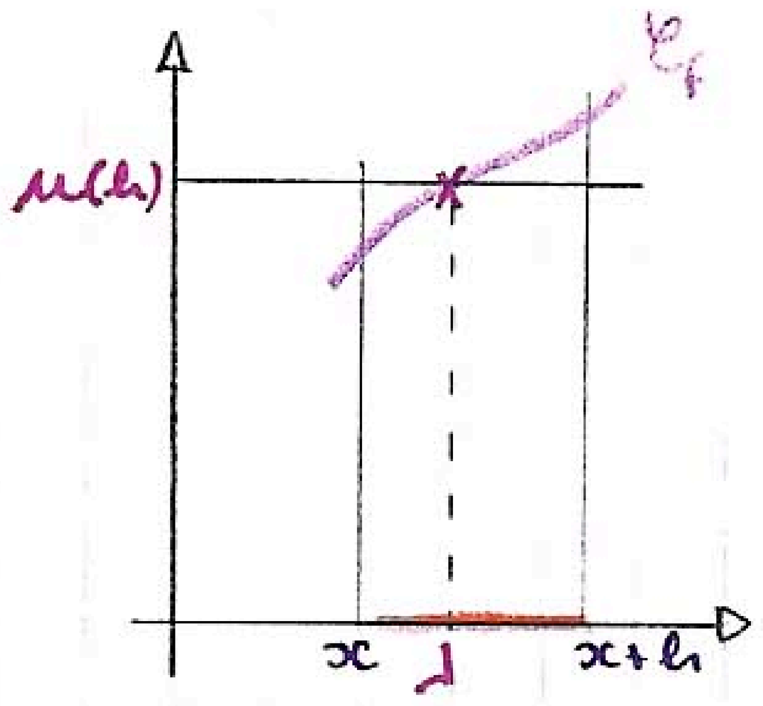
Soit $F : \begin{cases} [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{cases}$ (ou $\int_a^x f(t).dt$ avec $x \neq t$)

Alors : $\boxed{F'(x) = f(x)}$

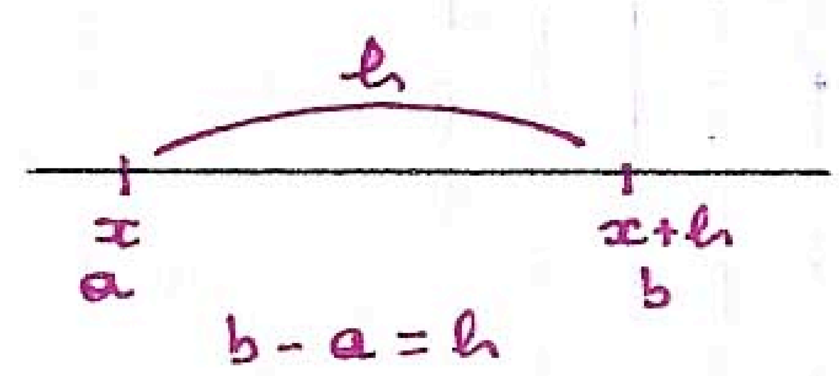
Démo : Soit $T_F = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$ (taux d'accroissement de F)

$$T_F = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right]$$

$$\Rightarrow T_F = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f + \int_x^a f\right] = \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f}_{\text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [x\,;\,x+h]}$$



| x fixé
| h variable



Donc $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f = \mu_h = f(\lambda)$

avec $\lambda \in [x\,;\,x+h]$

Conclusion : $\lim\limits_{h\to 0} T_F = \lim\limits_{h\to 0} f(\lambda)$ (x fixé)

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ CQFD

Applications de la formule $\displaystyle\int_a^x f(t).\,dt = F(x)$, $x \in [a\,;\,b]$ | avec $F'(x) = f(x)$, f dérivable sur $[a\,;\,b]$

1° $\displaystyle\int_a^b f(t).\,dt = F_1(b) - F_1(a)$ $\quad F_1 =$ une primitive QUELCONQUE de f

$= G(b) - G(a)$

avec $G(x) = F_1(x) + k$

$\Downarrow$

$G(b) - G(a) = (F_1(b) + k) - (F_1(a) + k)$
$= F_1(b) - F_1(a)$

| $\displaystyle\int_a^b f(t).\,dt = F(b)$
| $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t).\,dt = 0$

avec $F'(x) = f(x)$

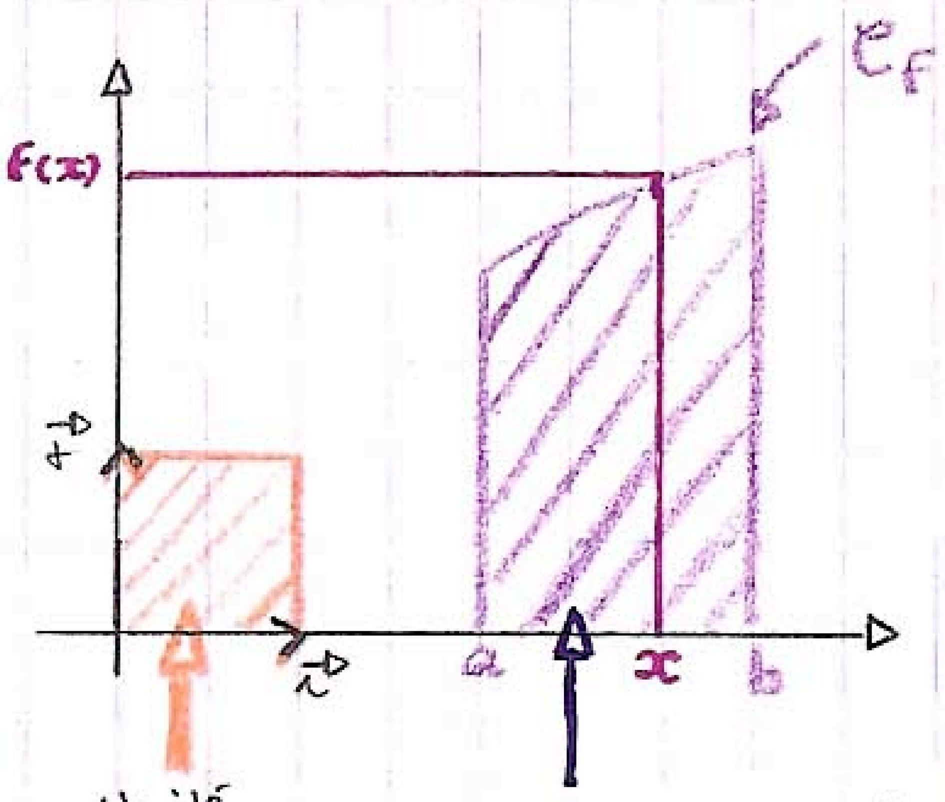
JEUDI 11 JANVIER 2001

Remarque : La fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est LA primitive de f qui s'annule en a.

NOTATION : On écrit $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t).\,dt = \Big[F_1(t)\Big]_a^b$

variable muette

2° calculs d'aires

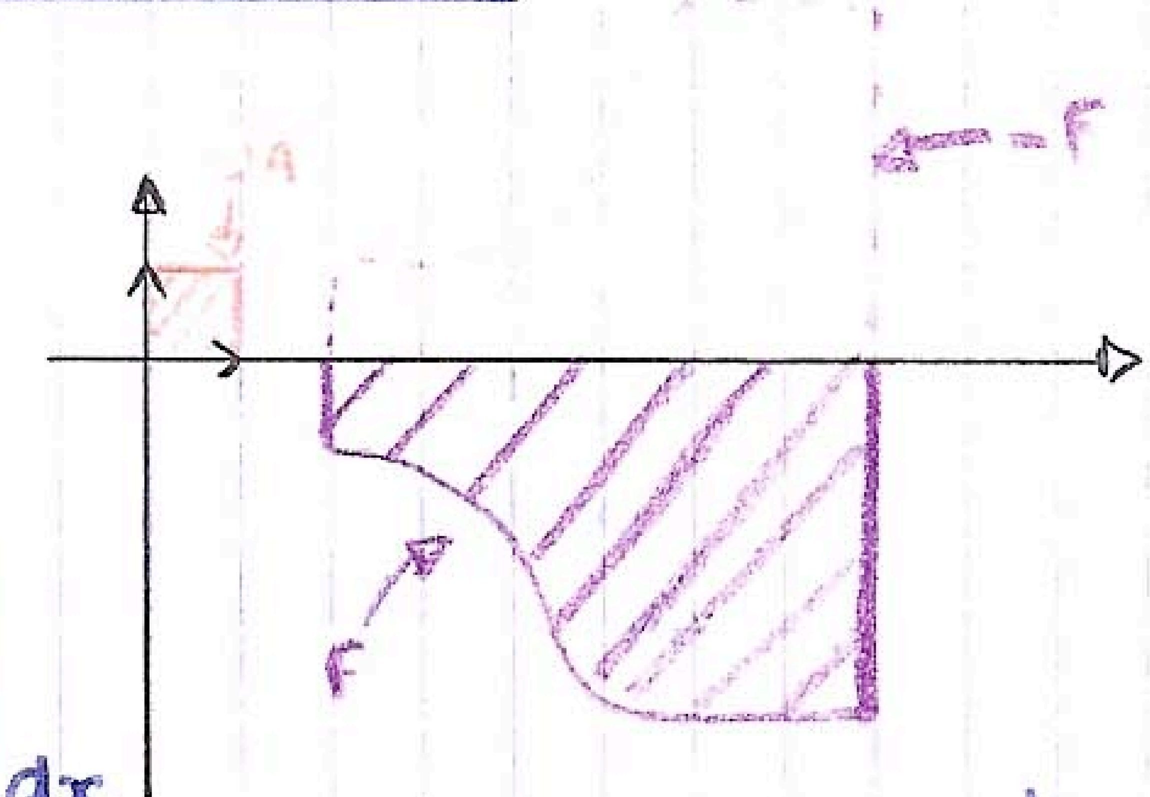


$D = \{x;y\} \;/\; \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right.$

1er cas : aire du domaine D
$= \left[\int_a^b f(x).dx\right] \times UA$

Si $\|\vec{i}\| = 2cm$
$\|\vec{j}\| = 3cm$
$\Rightarrow UA = 6cm^2$

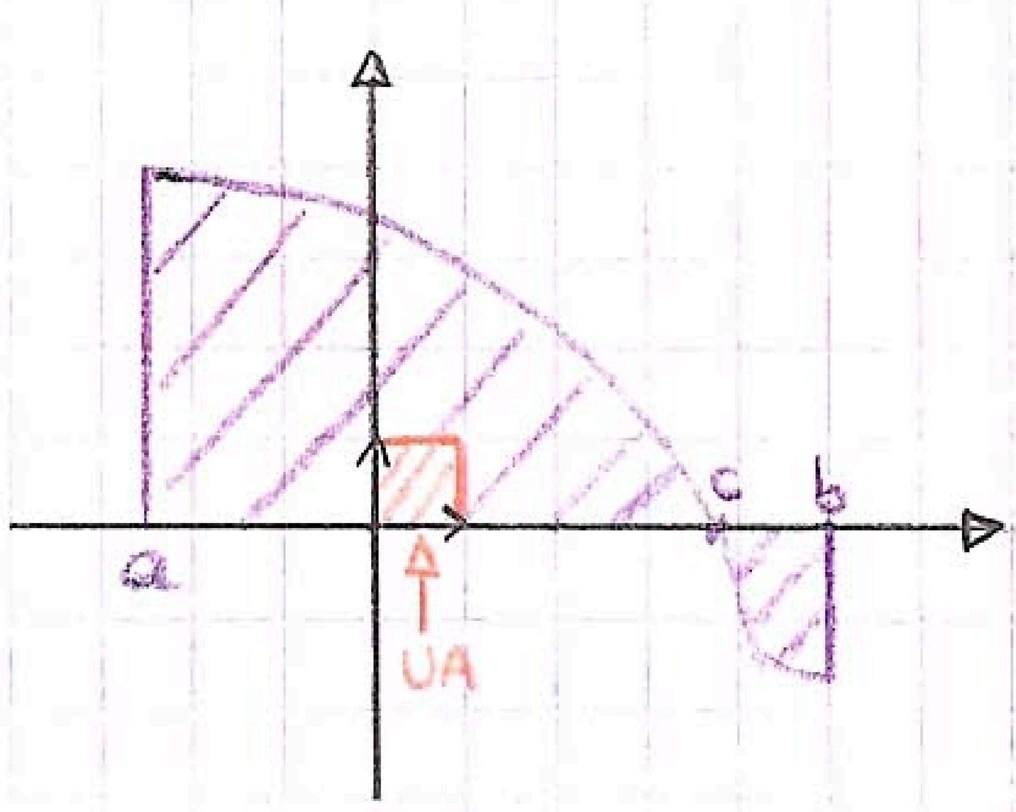
2e cas: $f \leq 0$ sur $[a;b]$



aire $= \left[-\int_a^b f\right] \times UA$

En effet $\int_a^b [-f(x)].dx = -\int_a^b f(x).dx$

$\int_a^b f < 0$

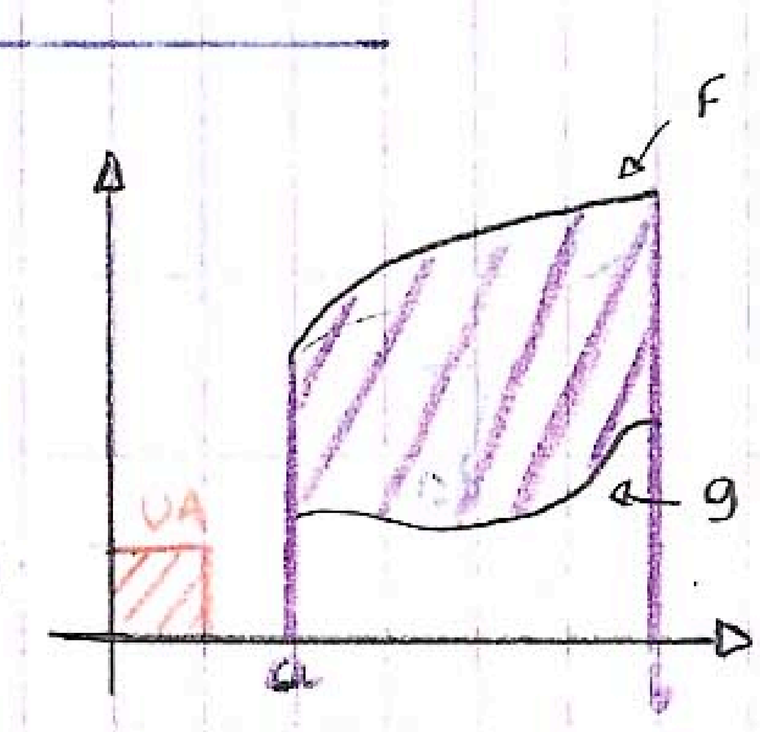


3e cas :

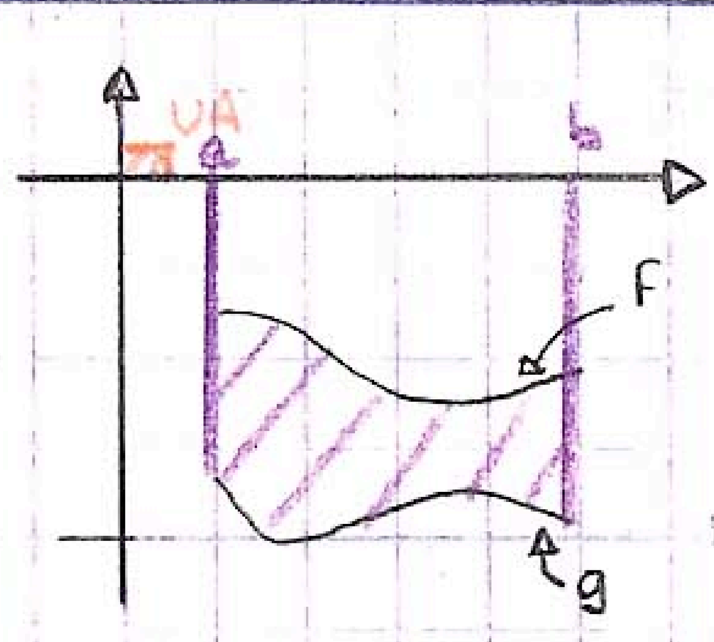
Aire $= \left[\int_a^c f - \int_c^b f\right] \times UA$
$\neq \int_a^b f \times UA$

4e cas :

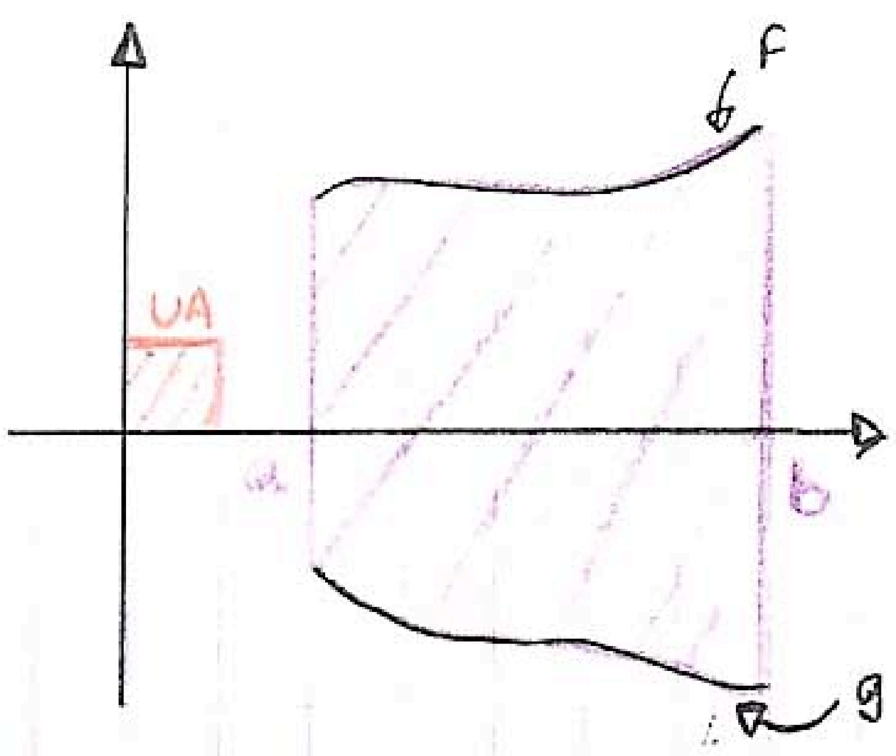
aire $= \left[\int_a^b f - \int_a^b g\right] \times UA$
$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times UA$



4bis :

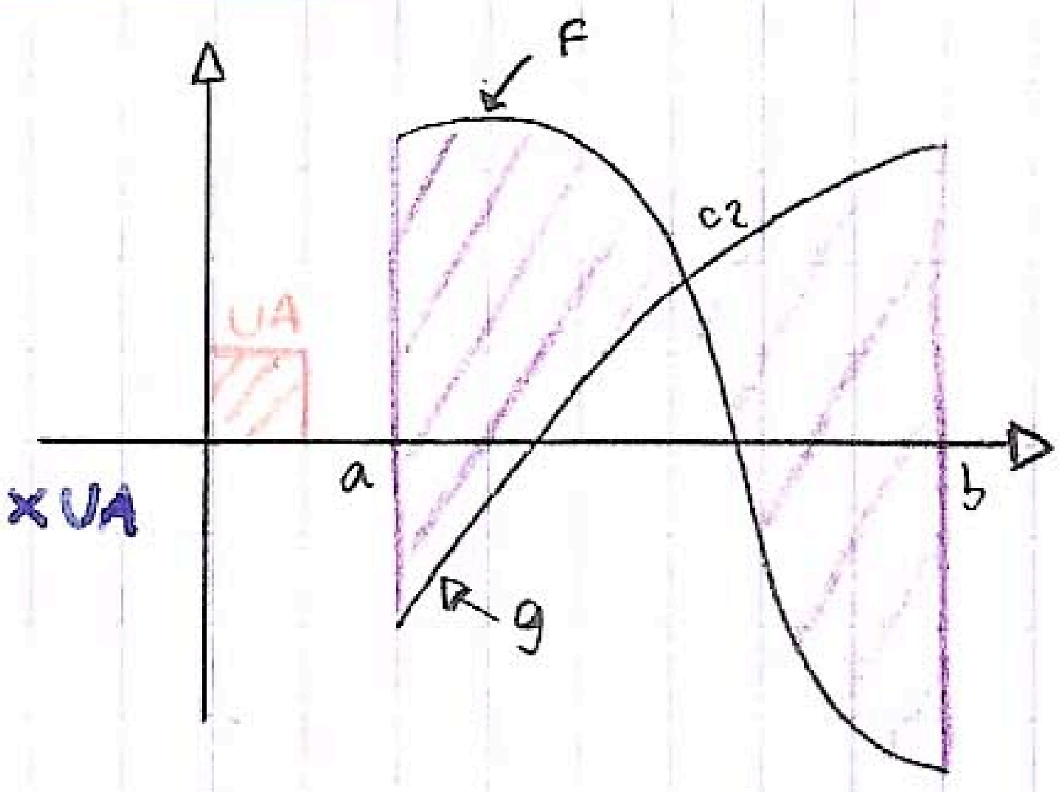


aire $= \left[\int_a^b (f-g)\right] \times UA$



<u>5e cas :</u>

$$\text{Aire} = \left[\int_a^b f - \int_a^b g\right] \times UA$$



<u>6e cas :</u>

$$\text{Aire} = \left[\int_a^{c_2} f-g + \int_{c_2}^b g-f\right] \times UA$$

LUNDI 15 JANVIER 2001

[ipp] THÉORÈME D'INTÉGRATION PAR PARTIES

<u>Objectif</u> : calculer les primitives d'une fonction produit de 2 fonctions élémentaires de primitives connues

<u>Rappels</u> :

$u^n . u'$ — PRIMITIVE ⟶ $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$

u^n ⟶ ? (sauf si $u(x) = ax+b$)

$\dfrac{u'}{u}$ ⟶ $\ln|u|$

$\dfrac{1}{u}$ ⟶ ? (sauf si u = 1er degré)

$\dfrac{u'}{u^2}$ ⟶ $-\dfrac{1}{u}$

$1/u^2$ ⟶ ?

$u^\alpha . u'$ ⟶ $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

uv ⟶ ?
n'a pas de primitive connue, en fonction de prim. | de u | de v

▷ $(uv)' = u'v + uv'$ ⟹ $u'v = (uv)' - uv'$

⟹ PRIM de $[u'v]$ = uv - PRIM de (uv')

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Exemples : ① $\int_0^{\pi/2} \underbrace{x.\sin x}_{} . dx$

Produit non intégrable directement.

1er essai (gagnant) : $v = x \Rightarrow v' = 1$
$u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x$

vérif : $\int_0^{\pi/2} x \sin x . dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos x)'. x . dx$

$= \left[(-\cos x) x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x) \times 1 . dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} x \sin x . dx = \left[(0 \times \pi/2) - (-1).0\right] + \int_0^{\pi/2} \cos x . dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} x \sin x . dx = \int_0^{\pi/2} \cos x . dx$

$= \left[\sin x\right]_0^{\pi/2}$

$= \sin \pi/2 - \sin 0 = 1$

NB $\int_0^{\pi/2} \underbrace{x \sin(x^2)}_{\text{Forme } (\sin u) u'} . dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2x \sin(x^2) . dx$

$= \frac{1}{2} \left[-\cos(x^2)\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2} \left[-\cos \frac{\pi^2}{4} - (-1)\right]$

$= \frac{1}{2} \left[1 + 0,8\right] = 0,9$

! $\cos \frac{\pi^2}{4} \neq \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^2$

$\cos \frac{\pi^2}{4} = \cos 2,5 = -0,8$

② $\int_0^1 \overset{v}{x^2} . \overset{u'}{e^x} . dx$ calcul au moyen de 2 ipp successives

$x^2 \xrightarrow{\text{Dérivation}} \underset{v'}{2x}$; $\underset{u}{e^x}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \overset{u}{x^2}\,.\,\overset{v'}{e^x}\,.\,dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{u'.v}\,.\,dx = [x^2.e^x]_0^1 - \int_0^1 2x.e^x.dx$$

$$2x \qquad e^x$$
$$u' \qquad v$$

$$= [1^2.e^1 - 0.e^0] - 2\int_0^1 x.e^x.dx$$

$$= e - 2I$$

Or $I = \int_0^1 x.e^x.dx = [x.e^x]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}.dx = e - [e^x]_0^1$

$$1 \qquad e^x$$

$$= e - (e^1 - e^0)$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2.e^x.dx = e - 2$$

A priori c'est juste car $e-2>0$ et $e^x.x^2>0$ (intégrale du m̂ sgn que fonction sur l'intervalle étudiée).