Durée : 4 heures

Baccalauréat Blanc n° 1 série S
Mathématiques

EXERCICE 1 **5 points**

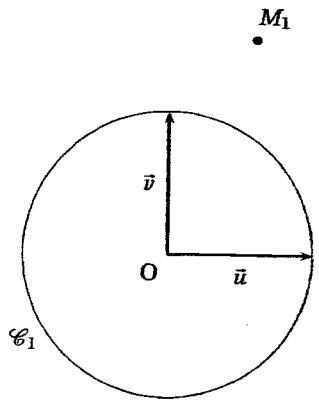
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|).$$

Le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Pour z complexe non nul, on note $z = re^{i\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2 - r)e^{i\alpha}$.
2. Déterminer l'affixe a' du point A', image par f du point A d'affixe $a = 3$.
3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + i$.
   a. Écrire b sous forme exponentielle.
   b. Déterminer l'affixe b' du point B', image du point B par f.
4. Placer A, B, A' et B' sur la figure..
5. a. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.
   b. Représenter E sur la figure.
6. Montrer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.
7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n' appartenant pas au cercle $\mathscr{C}_1$.
   On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où M' est l'image de M par f.
   a. Montrer que I appartient à $\mathscr{C}_1$.
   b. Montrer que I appartient à la demi-droite $[OM)$.
   c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1.
   Construire le point M'_1, image par f du point M_1.



EXERCICE 2 **8 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à} [0\,;+\infty[,\ f'(x) = 4 - \left[f(x)\right]^2 \\ (2) & : f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n,\ y_{n+1} = -0{,}2y_n^2 + y_n + 0{,}8 \quad (*) \end{cases}$$

1. Démontrer l'identité $(*)$.
2. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
   Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
   b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
   c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
3. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8$. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $p(x) \in [0\,;2]$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
   c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
   d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).
2. a. Montrer que $(\mathscr{C}_g)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   b. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ à l'origine.
4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

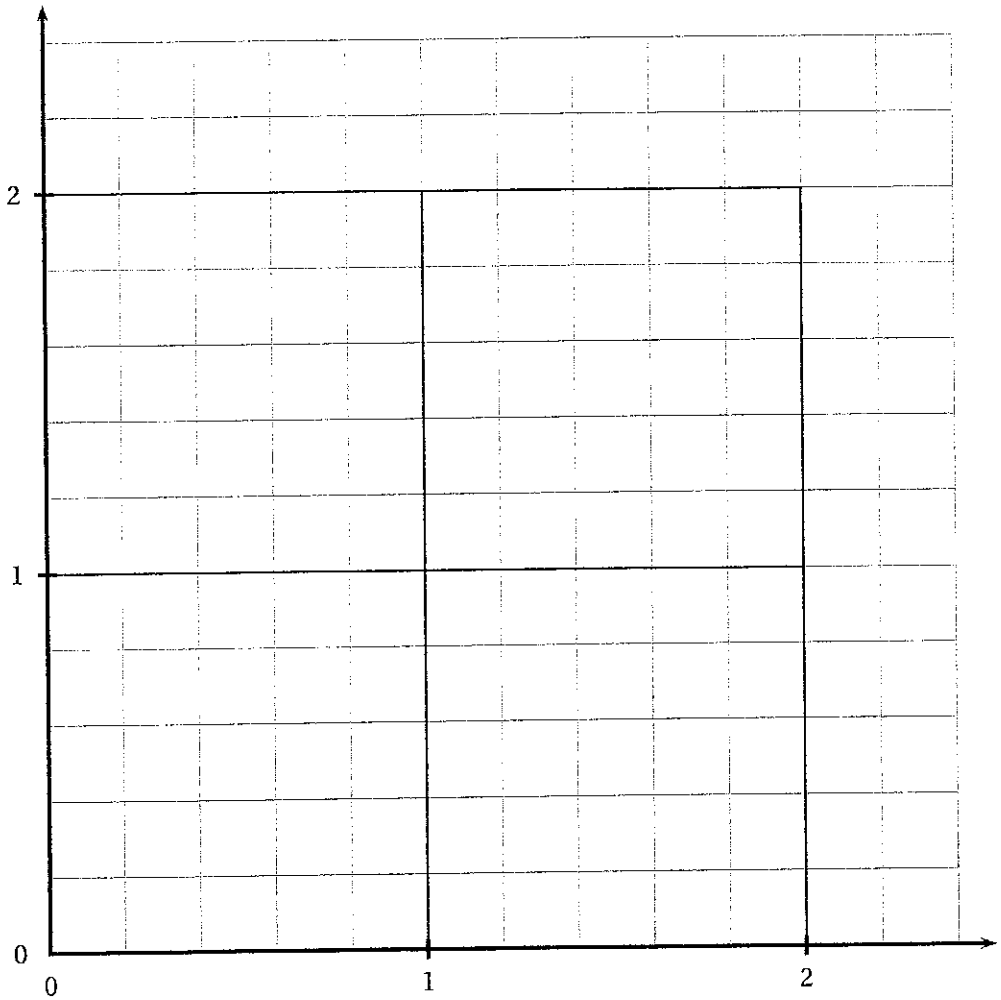
Cette page sera complétée et remise avec la copie avant la fin de l'épreuve

Exercice 2 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

Partie B



EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.

2. Justifier que, pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b) Étudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variations.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 4 **2 points**

Commun à tous les candidats

Ces exercices constitueent des restitutions organisées de connaissances.

I. Nombres complexes

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

II. L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;\,+\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A\,;\,+\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty}\psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

   b. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

   c. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

2. a. Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.

   b. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 2$.

   c. Déterminer tous les couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3. Déduire des questions précédentes les entiers relatifs a de $[-100; 100]$ solutions de l'équation $20a \equiv 4\ [168]$.

4. Déduire du **2.** les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$.