III - Suites Numériques COMPLEXES

$A_0 \leftrightarrow z_0 = 2$

$A'_0 \leftrightarrow 2i$ $\Big\} \Rightarrow z_1 = \frac{z_0+z'_0}{2} = \frac{2+2i}{2} = \boxed{1+i}$

A_1 milieu de $[A_0;A'_0] \iff \vec{OA_1} = \frac12(\vec{OA_0}+\vec{OA'_0}) \iff$ ⇑.

$A_n \leftrightarrow z_n$

$A'_n \leftrightarrow i.z_n$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{z_{n+1} = \frac{z_n + i z_n}{2}} = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n$

A_{n+1} milieu de $[A_n;A'_n]$

$\Updownarrow$

$z_n = z_0 . q^n = 2.\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

Donc (z_n) suite géométrique dans $\mathbb{C}$
- Raison $q = \frac{1+i}{2}$
- 1er terme $z_0 = 2$.

• $q = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt2}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{z_n = 2\times\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n \times e^{ni\frac{\pi}{4}}} \iff \begin{cases} \theta_n = n\frac{\pi}{4} \\ \rho_n = 2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n \end{cases}$

• $|q| = \frac{\sqrt2}{2} = \frac{1}{\sqrt2} < 1$ $\quad \rho_n = 2.\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^n$ | Suite géom Réelle
Raison $q=\frac{1}{\sqrt2}$ 1er terme $\rho_0 = 2$.

Donc $\lim \rho_n = 0$. (car $|q|<1$).

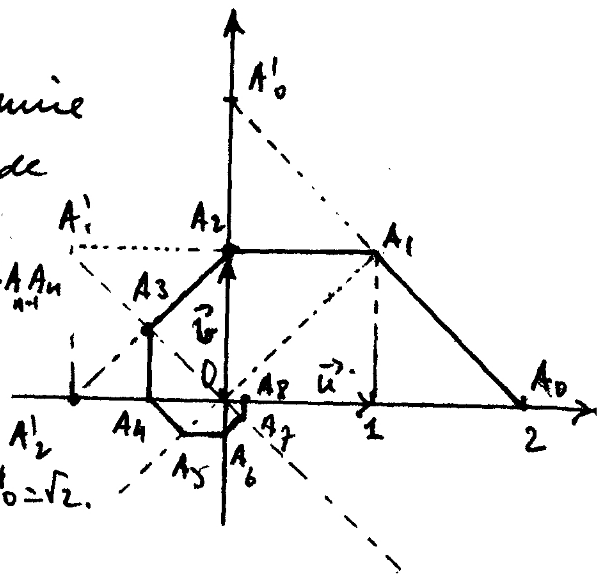
• $|z_n| = \rho_n \to 0 \iff \|\vec{OA_n}\| \to 0 \Rightarrow$ A_n se rapproche indéfiniment de O. (centre du repère $(O;\vec u;\vec v)$).

• $z_{n+1} = \frac{\sqrt2}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} . z_n \iff$ A_{n+1} est l'image de A_n par la composée d'une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt2}{2} < 1$.

• $z_{n+8} = 2\times\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{n+8} e^{(n+8)i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n e^{ni\frac{\pi}{4}} \times \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^8 e^{8i\frac{\pi}{4}} = z_n \times \frac{1}{2^4} e^{2i\pi} = \boxed{\frac{1}{16} z_n}$

• les points A_n et A_{n+8} sont donc placés sur un même rayon vecteur d'origine O :
$\vec{OA_{n+8}} = \frac{1}{16}\vec{OA_n}$ car $\arg(z_{n+8}) \equiv \arg(z_n)\ [2\pi]$; $|z_{n+8}| = \frac{1}{16}|z_n|$.

• on passe de A_n à A'_n par une Rotation $[O; +\frac{\pi}{2}]$
et comme A_{n+1} est le milieu de $[A_n;A'_n]$ on peut construire A_{n+1} en prenant le milieu de la diagonale du carré de côtés OA'_1 et OA'_1.



ou $= \left|\left(\frac{1+i}{2}\right) z_n - \left(\frac{1+i}{2}\right) z_{n-1}\right| = \frac{\sqrt2}{2} A_{n-1}A_n$

③ $A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2} z_n - z_n\right| = |z_n| \times \left|\frac{1+i}{2} - 1\right|$

$= \rho_n \times \left|\frac{1+i-2}{2}\right| = \rho_n \times \left|\frac{-1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt2}{2}.\rho_n = \sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n$

donc $d_n = \sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^n$ suite géom de Raison $q = \frac{1}{\sqrt2}$ $d_0 = \sqrt2$.

$\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n = d_0+d_1+d_2+\dots+d_{n-1}$

$= \sqrt2[1+q+\dots+q^{n-1}] = \sqrt2 \frac{1-q^n}{1-q} \longrightarrow \frac{\sqrt2}{1-q} = \frac{\sqrt2}{1-1/\sqrt2} = \frac{2}{\sqrt2-1} = \boxed{2.\sqrt2+2} = (2\sqrt2+2)\times 2\text{ cm}$

$\simeq 9,6\text{ cm}$.