II. Etude de la suite (u_n) définie par $\boxed{u_n = \frac{n^2}{2^n}}$ $n \geq 0$

[A] - $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

1°) $\lim v_n = \frac{1}{2}$ car $\lim \frac{n+1}{n} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

2°) $n>0 \Rightarrow \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} > 1 \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 > 1 \Rightarrow v_n > \frac{1}{2}$.

3°) Lorsque $v_n < \frac{3}{4}$ il faut et il suffit que $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(n^2+2n+1) < 6n^2$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 8n - 4 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 4n - 2 > 0 \Leftrightarrow (n-2)^2 > 6 \Leftrightarrow n-2 > \sqrt{6} \Leftrightarrow n > 2+\sqrt{6}$
($n>0$) ($n>0$)

or $\sqrt{6} \simeq 2{,}4$ donc il faut et il suffit que $n > 4{,}4$ donc il suffit de prendre $\boxed{N=5}$ et on a bien $n \geq N = 5 \Rightarrow v_n < \frac{3}{4}$.

4°) $n \geq N = 5 \Rightarrow v_n < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n}$ (car $u_n > 0$).

[B] on pose $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$ $(n-4)$ termes.

1°) Soit à démontrer (H_n) : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ pour $n \geq 5$

Init : $(H_5) \Leftrightarrow u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot u_5$ Vrai.

Hérédité : $(H_n) \Leftrightarrow u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ et d'après [A-4°] $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$ pour $n \geq N = 5$.

donc $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5 \Rightarrow u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-5} \cdot u_5$ (H_{n+1}) CQFD.

Conclusion (H_n) vraie pour tout $n \geq 5$.

2°) $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n \leq u_5 + \frac{3}{4} u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5$

donc $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \cdot u_5 \Rightarrow S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] u_5$

or la somme $1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ est la somme de tous d'une suite géométrique CROISSANTE de 1er terme 1 et de raison $q = \frac{3}{4}$ qui converge vers $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

donc $1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \leq 4 \Rightarrow \boxed{S_n \leq 4 \cdot u_5}$.

4°) $u_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32} \Rightarrow S_n \leq 4 \times \frac{25}{32} = \frac{25}{8} = 3{,}125$ donc S_n MAJORÉE

De plus $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5 \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n$ donc tout $n \geq 5$

donc (S_n) ↗ (à partir de $n=5$). La suite (Att!) (S_n) est CONVERGENTE.

et sa limite $\ell \leq 4 \cdot u_5$ i.e. $\boxed{\ell \leq 3{,}125}$ $(\ell > 0)$.

Autre méthode : on pose $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ pour $n \geq 5$, (v_n) géométrique de raison $\frac{3}{4}$

NB : on a donc montré que : $\frac{5^2}{2^5} + \frac{6^2}{2^6} + \frac{7^2}{2^7} + \cdots + \frac{n^2}{q^n} + \cdots \to \ell \leq 3{,}125$

.../...