TS4 / Co / C2 / 12 oct. 2004 1/4

I - Etude de la suite (u_n) $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}. \end{cases}$

1°)

• $f(x)=\sqrt{3x+4}$ ↗ sur $[-\frac{4}{3};+\infty[$.

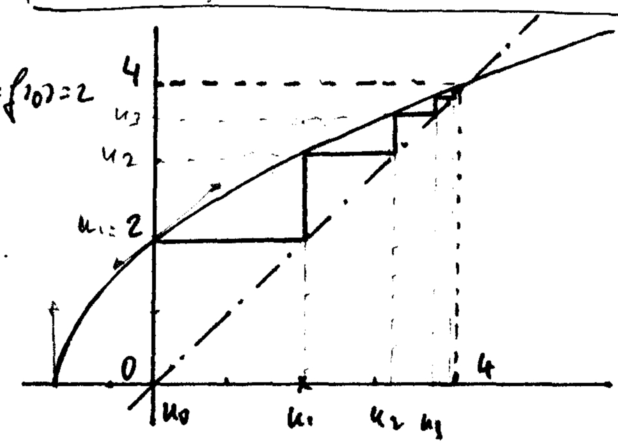
car $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}>0$ sur (Idem)

• D'après la figure : (u_n) ↗

$0 \le u_n \le 4 \Rightarrow (u_n)$ bornée

(u_n) converge vers 4.

$u_1=f(u_0)=f(0)=2$
$u_2=f(u_1)$
$u_3=f(u_2)$
$u_4=f(u_3)\dots$
$f(4)=4$.



2°) x point fixe de $f \iff f(x)=x \iff \sqrt{3x+4}=x \iff 3x+4=x^2$ et $x\ge 0$.

$\iff x^2-3x-4=0$ et $x\ge 0 \iff [x=4$ ou $x=-1]$ et $(x\ge 0) \iff \boxed{x=4}$ seul pt fixe

NB { ce n'est pas parce que la suite (u_n) est minorée par 0 qu'il n'y a qu'un seul point fixe, mais parce que l'équation irrationnelle $\sqrt{3x+4}=x$ ne peut avoir aucune solution négative ! ($\sqrt{3x+4}\ge 0$).

3°) Soit (H_n) : $0\le u_n\le 4$. (i) Init : (H_0) vrai car $u_0=0$ donc $0\le u_0\le 4$ vrai.

(ii) Hérédité (n fixé) $(H_n) \Rightarrow \left| \begin{array}{c} f(0)\le f(u_n)\le f(4) \\ \text{car } f \nearrow \text{ sur } [0;4] \end{array} \right| \Rightarrow 0\le 2\le u_{n+1}\le 4$ (H_{n+1}).

CQFD.

(iii) conclusion : (H_n) vrai pour tout $n\ge 0$ (par récurrence).

4°) Soit (H_n) : $u_n\le u_{n+1}$. (i) Init (H_0) vrai car $u_0=0$ et $u_1=2 \Rightarrow u_0\le u_1$ ok.

(ii) Hérédité : $(H_n) \Rightarrow f(u_n)\le f(u_{n+1})$ car f ↗ sur $[0;4] \Rightarrow u_{n+1}\le u_{n+2}$ (H_{n+1}).
(et d'après 3°) $u_n\in[0;4]$).

CQFD.

(iii) conclusion : $\forall$ soit $n\ge 0$, $u_n\le u_{n+1}$, c'est-à-dire : (u_n) CROISSANTE.

5°) (u_n) majorée et croissante donc (u_n) CONVERGE (théorème), donc admet une lim.

Si $l=\lim(u_n)$ alors $\left| \begin{array}{l} u_{n+1}=f(u_n) \\ \text{et } f \text{ continue} \end{array} \right\} \Rightarrow l=f(l)$. i.e l = pt fixe $\Rightarrow \boxed{l=4}$

[B] 1°) $|u_{n+1}-4| = |\sqrt{3u_n+4}-4| = \dfrac{|(3u_n+4)-16|}{\sqrt{3u_n+4}+4} = \dfrac{3|u_n-4|}{\sqrt{3u_n+4}+4}$ | or $u_n\ge 0$. donc $3u_n+4\ge 4 \Rightarrow \sqrt{3u_n+4}\ge\sqrt{4}=2$

donc $\sqrt{3u_n+4}+4\ge 6$

et par suite on obtient bien $\dfrac{3|u_n-4|}{\sqrt{3u_n+4}+4}\le\dfrac{3}{6}|u_n-4| \Rightarrow |u_{n+1}-4|\le\frac{1}{2}|u_n-4|$

CQFD.

2°) Soit (H_n) : $0\le|u_n-4|\le 4\cdot(0{,}5)^n$ i) Init : $u_0=0$ donc $0\le|u_0-4|\le 4\times(0{,}5)^0$ VRAI.

(ii) Hérédité : d'après 1°) $0\le|u_{n+1}-4|\le\frac{1}{2}|u_n-4| \overset{(H_n)}{\le} \frac{1}{2}\times 4\times(0{,}5)^n \Rightarrow 0\le|u_{n+1}-4|\le 4(0{,}5)^{n+1}$ (H_{n+1}).

(iii) Conclusion : pour tout $n\ge 0$, $0\le|u_n-4|\le 4(0{,}5)^n$.

3°) la suite $v_n=4\times(0{,}5)^n$ est géométrique de raison $q=0{,}5$, $|q|<1$ donc $\lim v_n=0$

Donc par passage à la limite dans les inégalités :

$0\le\lim|u_n-4|\le\lim(4\times(0{,}5)^n) \Rightarrow \lim|u_n-4|=0$

et finalement (par définition) $\boxed{\lim u_n=4}$.

.../...