N°80. p. 141

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} & x \neq 0 \\ f_n(0) = 2n+1. \end{cases}$$

26/01/08

1/2

1°) f_n continue sur $]0;\pi]$ comme quotient de f. continues

f_n continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{(n+\frac{1}{2})x} \times \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times \dfrac{(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}}$

$= \lim\limits_{0} \dfrac{(n+\frac{1}{2})x}{(n+\frac{1}{2})x} \times \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times (2n+1). = 1 \times 1 \times 2n+1 = f_n(0).$

(Rappel : $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$).

2°) $I_n = \int_0^\pi f_n(x)\,dx$; $f_n(x) - f_{n-1}(x) = \dfrac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{\sin(2n+1)\frac{x}{2} - \sin(2n-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \overset{*}{=} \dfrac{2\cos nx . \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 2\cos nx$

[* en effet "on sait que" $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2} \times \sin\frac{p-q}{2}$
formule que l'on obtient à partir de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$
en posant $p = a+b$ et $q = a-b$ ou $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.] $\cancel{+}$

d'où $I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi [f_n(x) - f_{n-1}(x)]\,dx = \int_0^\pi 2\cos nx\,dx.$

$\Rightarrow I_n - I_{n-1} = \left[\frac{2}{n}\sin nx\right]_0^\pi = \frac{2}{n}[\sin n\pi - \sin 0] = 0$

Donc $I_n = I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Donc $I_n = I_0 = \int_0^\pi f_0(x)\,dx = \int_0^\pi 1\,dx = [x]_0^\pi = \pi - 0.$

Par suite $\int_0^\pi f_n(x)\,dx = \int_0^\pi \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \boxed{\pi}.$

pour tout $n \geq 0$.