Encore des Nombres Complexes !!!

(Réparation du Cont. N°1 à faire en 2h)

Les élèves qui n'auront pas rendu ce Devoir le lundi 8 octobre seront astreints à venir le faire le mercredi 10 octobre de 14 h à 17h à l'Ecole

EXERCICE I [6 points]

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = [O,(\vec{u},\vec{v})]$, on considère les 2 points A et B d'affixes respectives :
$$z_A = 1 + i \ \ et \ \ z_B = -\sqrt{3} + i$$
    a. Placer les points A et B dans le plan complexe.
    b. Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.
    c. Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique, et sous forme exponentielle.
2. On pose $z_P = \dfrac{z_B}{z_A}$
    a. Déterminer le module et un argument de z_P.
    b. Construire l'image P de z_P dans le plan complexe.
    c. Ecrire z_P sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
    d. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{7\pi}{12})$ *et* $\sin(\dfrac{7\pi}{12})$
3. Soit C l'image du point B dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$
    a. Déterminer le module et un argument de l'affixe z_C du point C.
    b. Montrer que $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
4. On pose $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
    a. Calculer le module et un argument de Z
    b. En déduire que AB = AC.
    c. Montrer que $Arg(Z) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et en déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE II [5 points]

1. Résoudre dans C l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = [O,(\vec{u},\vec{v})]$, unités graphiques 1carreau, on considère les points A, B, C, et P d'affixes respectives
$z_A = \dfrac{3}{2} + 6i$, $z_B = \dfrac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \dfrac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$, et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \dfrac{5}{2}i$
Dans chacun des cas suivants on écrira d'abord les relations vectorielles pour en déduire les relations entre les affixes demandées :
    a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.
    b. Déterminer l'affixe z_R du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.
    c. Déterminer l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
    d. Placer les points P,Q,R,S.
3. On considère le quadrilatère PQRS.
    a. Démontrer que c'est un parallélogramme.
    b. Calculer le rapport $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
    c. Justifier que les points P,Q,R,S appartiennent à un même cercle noté $\mathcal{C}$ dont on déterminera l'affixe du centre et le rayon.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$? Justifier la réponse !

Encore des Nombres Complexes !!!

(Réparation du Cont. N°1 à faire en 2h)

Les élèves qui n'auront pas rendu ce Devoir le lundi 8 octobre seront astreints à venir le faire le mercredi 10 octobre de 14 h à 17h à l'Ecole

EXERCICE III [5 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = [O,(\vec{u},\vec{v})]$ (Unités : 2 carreaux), α désigne un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$.

Pour tout $\alpha \in\,]-\pi\,;\,\pi[$ on définit le nombre complexe :

$$Z(\alpha) = \frac{1}{2}(1+e^{i\alpha})^2$$

1. Calculer $(1+e^{i\alpha})e^{-i\frac{\alpha}{2}}$
2. En déduire que le nombre complexe $(1+e^{i\alpha})$ a pour argument $\frac{\alpha}{2}$
3. Calculer le module et un argument de $Z(\alpha)$
4. Construire l'image dans le plan complexe de $Z(\frac{\pi}{6})$

EXERCICE IV [4 points] **Q.C.M. avec Justification**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse ou/et pour absence de justification.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A,B,C d'affixes respectives
   $-2 + 3i$; $-3 - i$; $2{,}08 + 1{,}98\,i$

   Indiquer si le triangle ABC est :
   a. isocèle et non rectangle
   b. rectangle et non isocèle
   c. Rectangle et isocèle
   d. Ni rectangle ni isocèle

2. A tout complexe de $z \neq 2$ on associe le complexe $z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$. Indiquer si l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est
   a. un cercle de rayon 1
   b. une droite
   c. une droite privée d'un point
   d. un cercle privé d'un point

3. Les notations étant les mêmes qu'à la question 2°. Indiquer si l'ensemble des points d'affixe z tels que z' soit un nombre réel est :
   a. un cercle
   b. une droite
   c. une droite privée d'un point
   d. un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe ***i***.

Indiquer quelle est l'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

a. $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

b. $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

c. $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

d. $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$