I - $\boxed{f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}}$ $n \geq 0$. $a \in I =]0;+\infty[$

$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $I_0(a) = \int_0^a f_0(x)dx = \int_0^a \frac{x^0}{0!}e^{-x}dx = \int_0^a e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^a = -e^{-a} - (-e^0) = \boxed{1-e^{-a}}$

2. $f_n'(x) = \frac{1}{n!}(x^n . e^{-x})' = \frac{1}{n!}[n x^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})] = \frac{n}{n!}x^{n-1}e^{-x} + \frac{x^n}{n!}e^{-x} = \frac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1} - \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

d'où $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ $\left[\text{NB} : n! = n\times(n-1)! \quad 0! = 1\right]$ $f_n(0) = \frac{0^n}{n!}e^0 = 0$.

en intégrant les deux membres sur $[0;a]$ il vient (par linéarité !).

$\int_0^a f_n'(x)dx = \int_0^a f_{n-1}(x)dx - \int_0^a f_n(x)dx \iff [f_n(x)]_0^a = I_{n-1}(a) - I_n(a)$.

$\iff f_n(a) - f_n(0) = I_{n-1}(a) - I_n(a) \iff I_n(a) - I_{n-1}(a) = -f_n(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$

CQFD

3. on a pour tout $n>0$

$$\left\{\begin{array}{l} I_n(a) - \cancel{I_{n-1}(a)} = -\frac{a^n}{n!}e^{-a} \\ \cancel{I_{n-1}(a)} - \cancel{I_{n-2}(a)} = -\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}e^{-a} \\ \cancel{\dots} \dots \times \dots \\ \cancel{I_1(a)} - I_0(a) = -\frac{a}{1!}e^{-a} \end{array}\right.$$

la addition mbà mb et réduction terme à terme

technique des DOMINOS : il ne reste que le 1er et le dernier terme !

$$I_n(a) - I_0(a) = -\left(\sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$$

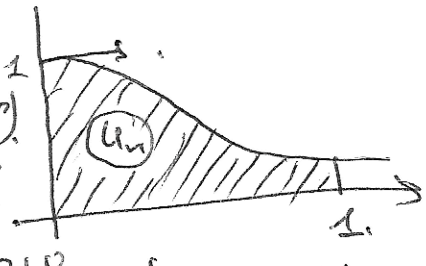
d'où $I_n(a) = I_0(a) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a} = 1 - e^{-a} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a} = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

ATTENTION !

4. $u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)dx = I_n(1)$

$\int_0^1 f_n(x)dx > 0 \Rightarrow u_n \geq 0$.

a) sur $[0;1]$ $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \geq 0$ donc u_n représente la mesure de l'aire du domaine plan compris entre la courbe et l'axe (Ox) sur l'intervalle $[0;1]$.



b) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0$ (car exp ↗)

$\Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{n!}e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!} \Rightarrow f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

c) $\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx = \frac{1}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$ CQFD.

d'où $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim u_n = 0$ (Th des gendarmes)

d) $\lim\left[1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)e^{-1}\right] = 0 \iff 1 - \lim\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)\times e^{-1} = 0$

$\iff e^{-1} \times \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

On écrit symboliquement : $e = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \simeq 2,718\dots$

Exercice II $\boxed{f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}}$ $x \in \mathbb{R}$

[A] 1. $f(x) = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{1+e^x}$. CQFD.

2. $\lim_{+\infty} f(x) = \boxed{1}$ car $\lim_{+\infty} e^{-x} = 0$; $\lim_{-\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{-\infty} e^{-x} = +\infty$.

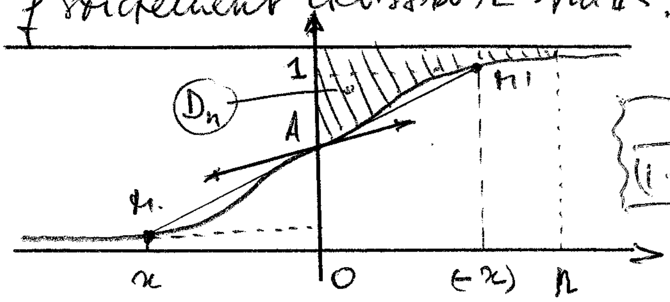
(C_f) admet donc 2 asymptotes "horizontales" : $y = 1$ (en $+\infty$) et $y = 0$ (en $-\infty$).

3. $f'(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)'$ Forme $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \boxed{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}$ ou $\boxed{\frac{e^x}{(1+e^x)^2}}$

Donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f strictement CROISSANTE sur $\mathbb{R}$.

4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$0^{(+)}$	$\nearrow$	$1^{(-)}$



$f(0) = \frac{1}{2}$ $f'(0) = \frac{1}{4}$.

[B] 1. Soit A = milieu [MM'] $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_A = \frac{x+x'}{2} = \frac{x+(-x)}{2} = \boxed{0} \\ y_A = \frac{y+y'}{2} = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right] = \boxed{\frac{1}{2}} \end{cases}$

Donc $A(0 ; \frac{1}{2}) \in (C_f)$

A est donc un CENTRE de SYMÉTRIE pour (C_f), car le milieu A de [MM'] est INVARIANT quelque soit x (quelque soit M).
De plus puisque (C_f) passe par A, la courbe traverse sa tangente en A (par symétrie), et donc A est un POINT d'INFLEXION pour (C_f).

2. $A_n = \int_0^n [1 - f(x)]\,dx \times UA. = \left[\int_0^n 1.dx - \int_0^n f(x)\,dx\right] \times UA$.

a) or d'après [A] 1°. $f(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u} = (\ln|u|)'$ donc avec $u(x) = 1+e^x$.

$A_n = \{[x]_0^n - [\ln(1+e^x)]_0^n\} \times UA$. $\Leftrightarrow$ $\boxed{A_n = [n - \ln(1+e^n) + \ln 2] \times UA}$.

l'unité d'aire U.A $= 5 \times 5$ cm² $= 25$ cm² $\Rightarrow$ $A_n = [n - \ln(1+e^n) + \ln 2]25$ cm².

b) $\lim_{n \to +\infty} A_n = 25 \times \lim_{+\infty}[n - \ln(1+e^n) + \ln 2] = 25 \lim_{+\infty}[\ln e^n - \ln(1+e^n) + \ln 2]$.

$\Rightarrow \lim_{+\infty} A_n = 25 \times \lim_{+\infty}\left[\ln\frac{e^n}{1+e^n} + \ln 2\right]$ or $\lim_{+\infty} \frac{e^n}{1+e^n} = \lim_{n \to +\infty} f(n) = 1$

Donc $\lim A_n = 25 \times [\underbrace{\ln 1}_{0} + \ln 2]$ (car ln continue en 1.)

$\Rightarrow \lim A_n = \boxed{25 \times \ln 2 \text{ cm}^2}$ FINI !

[C] $\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ (on trouve $a = 1$ et $b = -1$ par Identification).

$\Rightarrow V(\lambda) = \int_{-\lambda}^{0} \pi[f(x)]^2\,dx = \pi\left[\int_{-\lambda}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_{-\lambda}^{0} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx\right] = \pi\left[\ln(e^x+1) + \frac{1}{e^x+1}\right]_{-\lambda}^{0}$

$\Rightarrow \boxed{V(\lambda) = \pi\left[\ln 2 + \frac{1}{2} - \ln(e^{-\lambda}+1) - \frac{1}{e^{-\lambda}+1}\right]}$.

$\begin{cases} \lim_{\lambda \to +\infty} (e^{-\lambda}+1) = 0+1 = 1 \\ \text{et } \ln 1 = 0. \end{cases}$

3. $\lim_{\lambda \to +\infty} V(\lambda) = \pi\left[\ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 1 - 1\right]$

Finalement $\lim_{\lambda \to +\infty} V(\lambda) = \boxed{\pi\left[\ln 2 - \frac{1}{2}\right]}$ ($\times$ U.V.). On obtient donc que bien que les domaines soient illimités les aires et les volumes sont limités.