On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Partie A

1. f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   $f = u - \dfrac{\ln v}{v}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 1+x$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
   $f' = u' - \left(\dfrac{\ln v}{v}\right)' = u' - \dfrac{\dfrac{v'}{v} \times v - v'\ln v}{v^2} = u' - \dfrac{1 - v'\ln v}{v^2}$.
   Par conséquent, pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
2. On pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   $N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2+1}{1+x}$. Comme x appartient à $]+1\,;\,+\infty[$, $1+x > 0$. Le numératuer est positif comme somme de nombres strictement positifs. Par conséquent, $N(x) > 0$ pour tout x. On en déduit que N est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   $N(0) = 0$ donc $N(x) < 0$ pour tout x de $]-1\,;\,0[$ et $N(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
   $f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ qui est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout x.
   Par conséquent, $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
   On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$, on résout l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Comme $f(0) = 0$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ se coupent à l'origine.

Partie B

1. Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, f est croissante donc pour tout x de $[0\,;\,4]$, $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$; or $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$ donc $f(x) \in [0\,;\,4$.
2. **a.** Voir courbe.
   b. Montrons par récurrence sur n, que, pour tout n, $u_n \in [0\,;\,4]$.
   - Amorçage : $u_0 = 4 \in [0\,;\,4]$ donc c'est vrai au rang 0.
   - Hérédité : supposons que $u_n \in [0\,;\,4]$ pour un entier n. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\,;\,4]$ d'après 1.

   Par conséquent, $u_n \in [0\,;\,4]$ pour tout n.
   c. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leqslant 0$ car $1 + u_n \geqslant 1$ d'où $\ln(1+u_n) \geqslant 0$.
   Par conséquent, la suite (u_n) est décroisssante.
   d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente vers un réel ℓ.
   e. Comme f est continue, on sait que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. On en déduit que $\ell = 0$.