(Bac-Blanc) Blanc

I – [7pts] **Euler et ses amis font du R.O.C.**

1. Rappeler la relation d'approximation affine de la valeur d'une fonction dérivable en un point a :
f(a+h) en fonction de f(a), de la dérivée f'(a) et de h, pour h voisin de 0.
2. On considère une fonction f supposée dérivable sur R telle que pour tout x on ait
$$f'(x) = 1 - 2f(x) \quad et \quad f(0) = 1$$
on suppose que l'on ne connaît pas l'expression de la fonction f mais on veut utiliser cette relation et la précédente pour représenter graphiquement point par point les valeurs (approximatives) que peut prendre cette fonction. Pour cela on construit la suite des points $M_n(x_n ; y_n)$ de la manière suivante :
$$\begin{cases} x_0 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + h \quad h = 0{,}1 \\ y_0 = 1, \quad y_n = f(x_n) \end{cases}$$
   a. Calculer $f(x_n + h)$ en fonction de x_n et de h en utilisant l'approximation affine de f.
   b. En déduire que pour tout n on a la relation
$$y_{n+1} = 0{,}8\, y_n + 0{,}1$$
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = 0{,}8\, x + 0{,}1$. On définit les suites (u_n) et (v_n) de la manière suivante : $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $u_0 = 1$ et $v_n = 0{,}5 - u_n$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique , déterminer sa raison et son premier terme.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).
   d. En utilisant les résultats précédents écrire y_n en fonction de n
   e. Calculer f(0,5) et f(1) par la méthode d'Euler.
4. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{2}(e^{-2x} + 1)$
   a. Démontrer que h satisfait les conditions initiales de la fonction f cherchée.
   b. Etudier les limites et les variations de h sur $[0 , +\infty[$
   c. Tracer la courbe représentative de h.
   d. Calculer h(0,5) et h(1) et comparer les résultats obtenus avec la méthode d'Euler.

I – [6 pts] **Questions Complexes** :.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
On appelle A le point d'affixe $-2i$.
À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe :
$$z' = -2\bar{z} + 2i.$$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.

2. Montrer que, si M appartient à la droite (D) d'équation $y = -2$, alors M' appartient aussi à (D).

3. Démontrer que, pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

4. Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z + 2i$.

a) Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

b) Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.

c) En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.

d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

III - [6 pts] – **Logarithme et suite récurrente**.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle] –1 ; +∞ [par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

[Partie A] Étude de certaines propriétés de la courbe (C) :

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > -1$.
2. Pour tout $x > -1$, on pose $N(x) = (1 + x)^2 - 1 + \ln(1 + x)$
   a. Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur] –1 ; +∞ [
   b. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   Calculer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec (D).
4. Déterminer la limite de f en +∞ et démontrer que (D) est asymptote à la courbe (C).
5. Montrer que la courbe (C) est située au dessous de (D) sur l'intervalle [0 ; +∞ [
6. Tracer soigneusement la courbe (C) et ses asymptotes.

[Partie B] Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f.

1. Démontrer que si $x \in [0 ; 4]$ alors $f(x) \in [0 ; 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Sur la figure obtenue ci-dessus, représenter les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.
   b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0 ; 4]$.
   c. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par α sa limite.
   e. Utiliser la partie [A] pour donner la valeur de α.

IV - [1 pt] – **R.O.C. logarithmique :**

Hypothèse : *(i)* sachant que ln désigne la fonction logarithme néperien on admet que

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

(ii) on admet la formule de la dérivée d'une fonction composée,
u étant une fonction supposée dérivable sur un intervalle I et f dérivable sur $J = f(<I>)$

$$(f[u(x)])' = f'[u(x)] \cdot u'(x)$$

Conclusion *(à démontrer !) quelques soient a >0 et b >0 alors on a*

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln(b)$$

Cadeau Bonux [1pt] en admettant la formule précédente démontrer que,
quelques soient a >0 et b >0

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$